

Оглавление

Глава 1. Примеры некоторых интегральных уравнений и их классификация.	5
1.1. Линейные интегральные операторы. Интегральные уравнения.	5
1.2. Ядра Фредгольма. Линейные уравнения Фредгольма. . .	12
1.3. Примеры некоторых интегральных уравнений других типов.	14
1.3.1. Сингулярные уравнения.	14
1.3.2. Уравнения Вольтерры	16
1.3.3. Уравнения с разностными ядрами.	17
1.3.4. Интегральные уравнения 1-го рода, определяемые интегральными преобразованиями.	17
1.3.5. Нелинейные интегральные уравнения.	18
1.3.6. Относительная единственность решения.	20
Глава 2. Теория Фредгольма.	21
2.1. Формулировки теорем Фредгольма.	21
2.2. Ядро произведения интегральных операторов. Итерированные ядра.	31
2.3. Построение решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода методом последовательных приближений. Понятие о резольvente Фредгольма.	38
2.3.1. Метод последовательных приближений в $C[a, b]$ и в $L_2[a, b]$	38
2.3.2. Понятие о резольvente Фредгольма.	46
2.4. Теоремы Фредгольма в конечномерном случае.	49
2.5. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. . . .	57
2.6. Доказательство теорем Фредгольма в общем случае. . . .	63
2.7. Свойства резольвенты Фредгольма.	71
2.7.1. Существование резольвенты Фредгольма при всех правильных значениях параметра.	71
2.7.2. Свойства резольвенты непрерывного ядра.	75
2.8. Ряды Фредгольма.	83
Задачи.	89
Ответы.	95
Литература.	98

Глава 3. Интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода.	5
3.1. Оператор Вольтерры в пространстве непрерывных функций.	5
3.2. Построение решения интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода методом последовательных приближений. Резольвента Фредгольма уравнения Вольтерры.	7
3.3. Примеры решений уравнений Вольтерры.	15
3.4. Уравнение Вольтерры с непрерывным ядром, зависящим от разности аргументов. Применение преобразования Лапласа для его решения.	20
 Глава 4. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах (некоторые понятия функционального анализа).	25
4.1. Линейные ограниченные операторы.	25
4.2. Вполне непрерывные линейные операторы.	30
4.3. Сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве. . .	34
4.4. Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве и некоторые их свойства. Теорема о существовании характеристического значения у ненулевого вполне непрерывного самосопряжённого линейного оператора. .	36
 Глава 5. Линейные интегральные уравнения 2-го рода с самосопряжёнными ядрами. Теория Гильберта–Шмидта*.	43
5.1. Основные свойства интегральных операторов Фредгольма с самосопряжёнными ядрами.	43
5.2. Теорема Гильберта–Шмидта.	52
5.3. Билинейные ряды.	57
5.4. Решение неоднородного интегрального уравнения 2-го рода с непрерывным самосопряжённым ядром. Резольвента Фредгольма непрерывного самосопряжённого ядра. .	62
5.5. Экстремальные свойства характеристических значений и собственных функций вполне непрерывного самосопряжённого линейного интегрального оператора. Неотрицательные и положительно определённые операторы. Теорема Мерсера.	69
5.5.1. Экстремальное свойство модуля характеристического числа.	69
5.5.2. Неотрицательный линейный оператор. Экстремальное свойство его характеристического числа.	70
5.5.3. Положительное симметричное ядро. Свойства характеристического числа с наименьшим модулем и отвечающей ему собственной функции.	72

5.5.4.	Достаточное условие регулярной сходимости билинейного ряда самосопряженного ядра.	73
5.6.	Самосопряженные краевые задачи. Задача Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова*	76
5.6.1.	Самосопряженные краевые задачи на собственные значения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.	76
5.6.2.	Задача Штурма–Лиувилля.	80
5.6.3.	Теорема Стеклова.	85
5.6.4.	Задача Штурма–Лиувилля в более общей постановке.	86
Глава 6. Некоторые сведения о линейных интегральных уравнениях 1–го рода.		5
6.1.	Линейное интегральное уравнение 1–го рода с фредгольмовым самосопряженным ядром. Теорема Пикара. . . .	5
6.2.	Уравнение Абеля.	10
6.2.1.	Задача Абеля.	10
6.2.2.	Решение уравнения Абеля.	12
6.2.3.	Уравнения типа Абеля.	14
6.2.4.	Дифференцирование дробного порядка.	18
6.3.	Линейные интегральные уравнения Фредгольма 1–го рода с приближенно заданной правой частью.	21
Глава 7. Линейные интегральные уравнения 2–го рода со слабой особенностью ядра.		25
7.1.	Операторы со слабой особенностью в случае многих независимых переменных.	25
7.2.	Оценка ядра произведения двух операторов со слабой особенностью. Ограниченность итерированных ядер, начиная с некоторого номера.	32
7.3.	Справедливость теорем Фредгольма для уравнений со слабой особенностью.	38
7.4.	Ядро, непрерывное в целом. Непрерывность решений интегрального уравнения со слабой особенностью.	44
Глава 8. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, их сведение к интегральным уравнениям Фредгольма 2–го рода со слабыми особенностями.		50
8.1.	Уравнение Лапласа. Постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана в пространстве и на плоскости.	50
8.1.1.	Математические модели некоторых стационарных физических процессов. Краевые условия на поверхностях и кривых Ляпунова*	51
8.1.2.	Внутренние задачи Дирихле и Неймана.	53

8.1.3.	Единственность классических решений внутренних краевых задач для уравнения Лапласа.	54
8.1.4.	Фундаментальные решения уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости. Регулярные на бесконечности гармонические функции в пространстве и на плоскости.	55
8.1.5.	Внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность их классических решений.	56
8.1.6.	Ньютоновы* и логарифмические потенциалы двойного и простого слоев.	58
8.2.	Поверхностный потенциал двойного слоя, его свойства. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле в $\mathbb{R}^3$ к интегральным уравнениям.	59
8.3.	Поверхностный потенциал простого слоя, его свойства. Сведение внутренней и внешней задач Неймана в $\mathbb{R}^3$ к интегральным уравнениям.	64
8.4.	Применение теории Фредгольма для изучения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана в пространстве.	68
8.5.	Логарифмический потенциал двойного слоя. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле в $\mathbb{R}^2$ к интегральным уравнениям.	75
8.6.	Логарифмический потенциал простого слоя. Сведение внутренней и внешней задач Неймана в $\mathbb{R}^2$ к интегральным уравнениям.	79
8.7.	Применение теории Фредгольма для изучения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана на плоскости.	83

Глава 1.

Примеры некоторых интегральных уравнений и их классификация.

К интегральным уравнениям приводят разнообразные задачи как прикладного, так и теоретического характера. Интегральные уравнения возникают в математическом моделировании широчайшего круга процессов и явлений. Очень часто задачи для дифференциальных уравнений бывает удобно переформулировать в эквивалентной форме — в виде того или иного интегрального уравнения. При этом теория интегральных уравнений помогает дать ответы на вопросы о существовании и о единственности решения исходной задачи. Так вместо задачи Коши или вместо краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения можно решать интегральные уравнения (отличных друг от друга типов для этих двух классов задач). Многие задачи математической физики, первоначально поставленные для уравнений в частных производных, также имеют другую формулировку на языке интегральных уравнений. Может оказаться выгодным строить численный метод решения задачи именно в её интегральной формулировке.

В данной главе приводятся некоторые примеры интегральных уравнений наиболее важных типов.

1.1. Линейные интегральные операторы. Интегральные уравнения.

Введём обозначения, которых в основном будем придерживаться в этой книге. Через x и y обозначим независимые действительные переменные, а неизвестные функции — через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$; эти функции будут искомыми в интегральных уравнениях.

Пусть в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ на координатной плоскости Oxy дана функция $K(x, y)$, а на отрезке $a \leq x \leq b$ — функция $\varphi(x)$; не будем пока оговаривать их свойства. Выражение

$f(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$ является функцией переменной x . Такой интеграл будем рассматривать как оператор: функция φ переводится им в функцию f . Символическое обозначение: $f = A\varphi$; здесь

$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$ — линейный интегральный оператор, действующий на φ . Напомним, что означает линейность оператора A : для любых функций φ_1 и φ_2 и для любых чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1A\varphi_1 + \alpha_2A\varphi_2$. Интегральный оператор A задается функцией $K(x, y)$, которую называют ядром интегрального оператора. Свойства интегрального оператора A определяются

свойствами его ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и классом тех функций $\varphi(x)$, на которые можно действовать этим оператором.

Определение всякого оператора A содержит предположение о том, что дана область его определения $Dom A$ и множество всех его значений (образ оператора) $Ran A$. Чтобы можно было говорить о линейности оператора, $Dom A$ и $Ran A$ должны быть линейными многообразиями. Например, областью определения интегрального оператора может быть $C[a, b]$ — линейное бесконечномерное пространство всех функций $\varphi(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$; в этом пространстве введем норму: $\|\varphi\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|$. Сходимость последовательности функций $\{\varphi_n\}$ к функции φ по указанной норме в пространстве $C[a, b]$ означает, что $\|\varphi_n - \varphi\|_{C[a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции $\varphi(x)$. Если оператор A действует из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, то становится осмысленным вопрос о непрерывности отображения A .

Пример 1.1.

Пусть $(A\varphi)(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$, где ядро $\mathcal{K}(x, y)$ является непрерывной функцией в замкнутом квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Если $\varphi \in C[0, 1]$, то функция $f(x) = (A\varphi)(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Это означает, что оператор A можно рассматривать как действующий из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Иными словами, $Dom A = C[0, 1]$, $Ran A \subseteq C[0, 1]$.

Выберем произвольную функциональную последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, состоящую из непрерывных функций, которая равномерно на отрезке $[0, 1]$ сходится к функции $\varphi(x)$ (т.е. $\{\varphi_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ в пространстве $C[0, 1]$). Тогда и функциональная последовательность

$\left\{ \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi_n(y)dy \right\}$ будет равномерно на $[0, 1]$ сходиться к функции $f(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$. Действительно, непрерывное ядро $\mathcal{K}$ является ограниченной функцией в S ; пусть $M = \max_{(x, y) \in S} |\mathcal{K}(x, y)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{где } \|A\varphi_n - A\varphi\|_{C[0, 1]} &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi_n(y)dy - \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy \right| = \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)(\varphi_n(y) - \varphi(y))dy \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |\mathcal{K}(x, y)| \cdot |\varphi_n(y) - \varphi(y)| dy \leq \\ &\leq M \cdot \max_{0 \leq y \leq 1} |\varphi_n(y) - \varphi(y)| = M \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{C[0, 1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

— в силу равномерной сходимости $\{\varphi_n\}$ к φ на $[0, 1]$. Следовательно,

действующий из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$ оператор A непрерывен. ■*

В линейном пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций можно ввести другую, евклидову норму. Для этого зададим в указанном пространстве скалярное произведение (φ, ψ) . Например, это можно сде-

лать следующим способом: положим $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$, если все

функции из рассматриваемого пространства принимают действительные значения (здесь речь идет о линейном пространстве над полем действительных чисел $\mathbb{R}$; все элементы пространства — действительные функции). Если же элементами линейного пространства являются непрерывные на $[a, b]$ функции, принимающие комплексные значе-

ния, то положим $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$, где черта над ψ означает

комплексное сопряжение (это случай линейного пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$). Такое евклидово пространство (действительное или комплексное) имеет обозначение $\widetilde{L}_2[a, b]$. Волна в этом обозначении указывает на то, что все функции, являющиеся элементами пространства, непрерывны. Получаем пространство с нормой

$\|\varphi\|_{\widetilde{L}_2[a, b]} = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \sqrt{\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx}$. Сходимость последовательности

функций $\{\varphi_n\}$ к функции φ по норме пространства $\widetilde{L}_2[a, b]$ означает, что $\|\varphi_n - \varphi\|_{\widetilde{L}_2[a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к функции $\varphi(x)$ в среднем квадратическом.

Задача 1.1.

Приведите пример последовательности непрерывных функций, которая фундаментальна в пространстве $\widetilde{L}_2[a, b]$, но не сходится в этом пространстве ни к одной непрерывной функции. ■

Напомним, что линейное нормированное пространство называют полным, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел, принадлежащий этому пространству. Пространство $\widetilde{L}_2[a, b]$ не является полным. Однако, можно доказать, что всякое неполное пространство можно рассматривать как подмножество некоторого более широкого полного пространства, которое называют пополнением исходного неполного пространства. При этом сохраняются нормы всех элементов исходного пространства, а значит, и все расстояния между ними. Пополнение определено однозначно с точностью до изоморфизма, сохраняющего все расстояния. Пополнение пространства $\widetilde{L}_2[a, b]$ имеет обозначение $L_2[a, b]$. На интуитивном уровне рассуждений построение этого пополнения состоит в добавлении ко

* Здесь и далее знаком ■ будет отмечено окончание замечаний, примеров, условий и решений задач, доказательств теорем и т.п.

всем непрерывным на $[a, b]$ функциям некоторых разрывных функций. Строгое определение пространства $L_2[a, b]$ основано на понятии интеграла Лебега* по отрезку $[a, b]$: элементами этого пространства являются все функции $\varphi(x)$, для которых существует конечный интеграл Лебега $\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx$; это число принимается за квадрат нормы элемента φ . Пространство $L_2[a, b]$ — линейное евклидово пространство со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$ (интеграл понимается в смысле Лебега). Если некоторая функция интегрируема на $[a, b]$ в собственном смысле по Риману**, то она интегрируема на $[a, b]$ и по Лебегу, причем оба эти интеграла совпадают. Поэтому $\widetilde{L_2[a, b]} \subset L_2[a, b]$. Некоторые несовпадающие на $[a, b]$ функции, принадлежащие $L_2[a, b]$, не различают, а относят к одному элементу этого пространства. Например, $\varphi(x) \equiv 0$ и функцию Дирихле*** считают эквивалентными. Можно доказать, что всякую функцию из $L_2[a, b]$ можно с любой точностью приблизить по норме пространства $L_2[a, b]$ непрерывными функциями (здесь важна ограниченность множества $[a, b]$). Это следует, например, из замкнутости в $L_2[a, b]$ тригонометрической системы функций (см. [23], гл.10; [28], гл.4, §5).

Теорема о пополнении метрического пространства, теория интеграла Лебега и теория пространства $L_2[a, b]$ изучаются в курсе функционального анализа. В курсе „Интегральные уравнения“ не будут использованы специальные понятия и теоремы функционального анализа. Основные факты можно доказать на языке непрерывных функций. Но во многих случаях возникает необходимость в понятиях и теоремах, имеющих смысл лишь в евклидовом пространстве; часто оказывается важной его полнота.

Изучая оператор A и связанные с ним уравнения, всегда будем указывать, каким именно пространствам принадлежат $Dom A$ и $Ran A$ — от этого зависят свойства оператора.

Задача 1.2.

Является ли пространство $C[a, b]$ евклидовым? Полно ли это пространство? ■

С интегральным оператором A связано несколько типов уравнений. Уравнение $\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$, $a \leq x \leq b$, называют линейным интегральным уравнением 1-го рода относительно функции $\varphi(x)$ (кратко: $A\varphi = f$); здесь даны функции $\mathcal{K}(x, y)$ и $f(x)$.

* Лебег Анри Леон (1875–1941) — французский математик.

** Риман Георг Фридрих Бернхард (1826–1866) — немецкий математик.

*** Дирихле Петер Густав Лежён (1805–1859) — немецкий математик.

Уравнение $\varphi(x) - \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$, $a \leq x \leq b$, называют линейным интегральным уравнением 2-го рода; функции $\mathcal{K}(x, y)$ и $f(x)$ даны. Для изучения такого уравнения удобно ввести ещё числовой параметр μ :

$$\varphi(x) - \mu \cdot \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1)$$

Ядром интегрального оператора в (1.1) можно было бы считать функцию $\mu \cdot \mathcal{K}(x, y)$, но будем явно выделять параметр и называть ядром функцию $\mathcal{K}(x, y)$. Параметр μ может иметь физический смысл, если уравнение (1.1) описывает некоторый физический процесс. (Параметр в интегральное уравнение впервые ввел Пуанкаре* для изучения свойств уравнения (1.1).) Всюду далее будем придерживаться обозначения $\lambda = 1/\mu$, $\mu \neq 0$. Вместо μ в качестве параметра можно выбрать λ , но в теории интегральных уравнений принято считать параметром числовой множитель μ перед интегралом. Если через E обозначить тождественный оператор, то уравнение (1.1) коротко запишется в виде $\varphi - \mu \cdot A\varphi = f$ или $(E - \mu \cdot A)\varphi = f$.

Замечание 1.1.

Тождественный оператор E нельзя выразить в виде интеграла $\int_a^b F(x, y)\varphi(y)dy$, т.е. невозможно найти такую функцию $F(x, y)$, чтобы для любой функции $\varphi(x)$ из некоторого пространства функций выполнялось бы равенство $\varphi(x) = (E\varphi)(x) = \int_a^b F(x, y)\varphi(y)dy$. ■

Пример 1.2.

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений подробно изучена краевая задача

$$(\Lambda\varphi)(x) \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) - q(x)\varphi(x) = \eta(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$\delta_1(\varphi) \equiv \alpha_1\varphi'(a) + \beta_1\varphi(a) = 0, \quad \delta_2(\varphi) \equiv \alpha_2\varphi'(b) + \beta_2\varphi(b) = 0,$$

где p, q, η — известные действительные функции, причем $p \in C^1[a, b]$, $p(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$, $q \in C[a, b]$, $\eta \in C[a, b]$; $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — известные действительные постоянные, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$. Если однородная краевая задача ($\eta(x) \equiv 0$ на $[a, b]$) имеет только нулевое решение, то существует функция Грина** $G(x, y)$, и она единственна. При этом решение неоднородной краевой задачи ($\eta(x) \neq 0$ на $[a, b]$)

* Пуанкаре Жюль Анри (1854–1912) — французский математик.

** Грин Джордж (1793–1841) — английский математик.

существует, единственно и дается формулой

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x, y)\eta(y)dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Выберем в качестве $\eta(x)$ выражение $-\nu \cdot \varphi(x)$, где ν — комплексный параметр. Если для некоторого значения ν_0 краевая задача $-\Lambda\varphi = \nu\varphi$, $\delta_1(\varphi) = 0$, $\delta_2(\varphi) = 0$ имеет нетривиальное решение $\overset{\circ}{\varphi}(x)$, то ν_0 называют собственным значением оператора $(-\Lambda)$, а $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ — его собственной функцией. Задачу нахождения собственных значений и собственных функций называют задачей Штурма–Лиувилля*. В предположении, что $\nu = 0$ не является собственным значением, эту задачу можно записать в виде однородного ($f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$) интегрального уравнения 2-го рода с параметром $\mu = -\nu$:

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b G(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Заметим, что ядро $G(x, y)$ интегрального оператора действительно и симметрично: $G(x, y) = G(y, x)$. Именно изучение этого интегрального уравнения и позволяет найти все свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. В том же предположении неоднородная краевая задача $-\Lambda\varphi = \nu\varphi + \eta$, $\delta_1(\varphi) = 0$, $\delta_2(\varphi) = 0$ запишется в виде уравнения $\varphi(x) - \mu \int_a^b G(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$, где $f(x) = \int_a^b G(x, y)\eta(y)dy$.

Подчеркнем, что определение функции Грина зависит от того, является или не является число $\nu = 0$ собственным значением. ■

Пусть в уравнении $q(x)\varphi(x) - \mu \cdot \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$, $a \leq x \leq b$, даны функции $\mathcal{K}(x, y)$, $f(x)$ и $q(x)$. Если $q(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$, то уравнение можно разделить на $q(x)$; тогда получим уравнение 2-го рода с ядром $\mathcal{K}(x, y)/q(x)$. Если $q(x) \equiv 0$, то имеем уравнение 1-го рода. Если же $q(x) \not\equiv 0$, но коэффициент $q(x)$ обращается в нуль в некоторых точках отрезка $[a, b]$, то указанное уравнение называют уравнением 3-го рода.

Свойства уравнений 1-го, 2-го и 3-го рода существенно различны. При выполнении определенных условий уравнение 2-го рода обычно

* Штурм Жак Шарль Франсуа (1803–1855) — французский математик.
Лиувилль Жозеф (1809–1882) — французский математик.

оказывается корректной задачей: его решение существует, оно единственно и устойчиво. Задача решения уравнения 1-го рода может оказаться некорректной. В этом случае надо определить, что следует понимать под решением некорректной задачи. Этот вопрос подробно изучается в курсе обратных и некорректно поставленных задач. Свойства уравнения 3-го рода определяются поведением коэффициента $q(x)$. Основная часть курса „Интегральные уравнения“ посвящена изучению линейных уравнений 2-го рода.

Замечание 1.2.

Пределы интегрирования a и b обычно будем считать конечными, $a < b$. Однако, имеются важные типы интегральных уравнений, в которых пределы интегрирования бесконечны. ■

Замечание 1.3.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$, $l > 1$, $\vec{x} \in \Omega$, $\vec{y} \in \Omega$. Пусть искомая функция зависит от l действительных независимых переменных: $\varphi = \varphi(\vec{x})$. Вместо квадрата S введем множество $\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^{2l}$ и зададим на этом множестве функцию $\mathcal{K}(\vec{x}, \vec{y})$. Тогда можно определить интегральный оператор $(A\varphi)(\vec{x}) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(\vec{x}, \vec{y})\varphi(\vec{y})d\Omega_{\vec{y}}$ (интеграл

здесь l -кратный). Важное значение имеют задачи решения интегральных уравнений с таким оператором A . Например, можно решать уравнения 2-го рода $\varphi - \mu A\varphi = f$, в котором даны функции $\mathcal{K}(\vec{x}, \vec{y})$ и $f(\vec{x})$. Теория таких уравнений практически не отличается от случая $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$. Далее будем в основном рассматривать уравнения со скалярными независимыми переменными x и y .

В интегральном операторе интегрирование может вестись не по области Ω , а по некоторой кривой или по поверхности. Если эту кривую или поверхность задать параметрически, то получим интеграл по области изменения параметров. Именно к уравнениям с такими интегральными операторами приводят многие задачи математической физики. ■

Замечание 1.4.

Ядро $\mathcal{K}(x, y)$, свободный член $f(x)$ и искомая функция $\varphi(x)$ далее обычно будут считаться комплекснозначными функциями действительных переменных. Параметр μ в уравнении (1.1) может принимать комплексные значения: $\mu \in \mathbb{C}$. ■

Замечание 1.5.

Не существует определения, объясняющего какое уравнение надо называть интегральным. Можно попытаться определить интегральное уравнение как „уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла“. Но в таком „определении“ не говорится, какие еще операции производятся над искомой функцией кроме интегрирования. Например, нельзя считать интегральным урав-

нение $\varphi(x) = \int_a^x \varphi'(y)dy + \varphi(a)$: для любой непрерывно дифференцируемой функции φ оно является тождеством. А уравнение $\lim_{h \rightarrow 0} \int_x^{x+h} \frac{\varphi(y+h) - 2\varphi(y) + \varphi(y-h)}{h^3} dy = f(x)$ является дифференциальным уравнением $\varphi''(x) = f(x)$. (Проверьте!)■

В следующих разделах будет дана классификация некоторых типов интегральных уравнений. Эта классификация заведомо не будет полной.

1.2. Ядра Фредгольма*. Линейные уравнения Фредгольма.

Определенное в квадрате S ядро $\mathcal{K}(x, y)$ называют фредгольмовым (другой термин — ядро класса $L_2(S)$), если существует конечный двой-

ной интеграл $\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy$. Это условие выполнено, например, если функция $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывна в замкнутом квадрате S или кусочно непрерывна в нем. Величину $\sqrt{\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy}$ будем обозначать

через $P_{\mathcal{K}}$ или через P , если ясно, о каком ядре идёт речь (эта величина является нормой функции $\mathcal{K}$ в $L_2(S)$). Пусть интегральный оператор A с фредгольмовым ядром действует на функции $\varphi \in L_2[a, b]$, т.е. $Dom A = L_2[a, b]$; такой оператор называют оператором Фредгольма. Например, его можно применить к непрерывной или кусочно непрерывной на $[a, b]$ функции φ . Оказывается, что если $\varphi \in L_2[a, b]$, то и $A\varphi \in L_2[a, b]$, т.е. $Ran A \subseteq L_2[a, b]$. Поэтому, решая уравнение (1.1), будем полагать, что $f \in L_2[a, b]$. Такое уравнение называют уравнением Фредгольма 2-го рода.

Пример 1.3.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S . Тогда в S выполнено неравенство $|\mathcal{K}(x, y)| \leq M = const < \infty$. Поэтому $P_{\mathcal{K}} \leq M \cdot (b-a)$. Если оператором A с непрерывным ядром действовать на функции φ , непрерывные на $[a, b]$, то в результате будем получать непрерывные функции $(A\varphi)(x)$. Поэтому, решая уравнение (1.1), надо полагать, что f — непрерывная функция. В таких предположениях (1.1) будет уравнением Фредгольма.■

Пример 1.4.

$S = \{0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b\}$. $\mathcal{K}(x, y) = \ln|x - y|$. Хотя ядро терпит разрыв при $y = x$, оно является фредгольмовым. В самом деле:

$$P_{\mathcal{K}}^2 = \int_0^b \int_0^b (\ln|x - y|)^2 dx dy = (b \cdot \ln b)^2 - 3b^2 \cdot \ln b + \frac{5}{2}b^2 < \infty.$$

(Проверьте!)■

* Фредгольм Эрик Ивар (1866–1927) — шведский математик.

Приведем примеры операторов, которые определяются интегралами с бесконечными пределами интегрирования. Напомним сначала теорему из теории несобственных интегралов (см.[15], Т.3, п.614).

Теорема.

Пусть $F(x, y) > 0$. Если сходится повторный интеграл $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} F(x, y) dy$, то сходится и двойной интеграл $\int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} F(x, y) dx dy$, и они равны. Если же повторный интеграл равен $+\infty$, то и двойной интеграл равен $+\infty$. ■

Пример 1.5.

$S = \{1 \leq x < +\infty, 1 \leq y < +\infty\}$. $K(x, y) = e^{-xy}$. Данное ядро фредгольмово:

$$P_K^2 = \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} |K(x, y)|^2 dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} e^{-2xy} dy = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx < \infty.$$

Если оператором A действовать на функции φ , для которых

$$\int_1^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty, \text{ то этот оператор фредгольмов. Уравнение}$$

$$\varphi(x) - \int_1^{+\infty} e^{-xy} \cdot \varphi(y) dy = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ является уравнением Фредгольма, так}$$

$$\text{как ядро фредгольмово и } \int_1^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < \infty. \blacksquare$$

Пример 1.6.

$S = \{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y < +\infty\}$. $K(x, y) = e^{-xy}$. Ядро не является фредгольмовым:

$$P_K^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2xy} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty. \blacksquare$$

Пример 1.7.

$a = -\infty, b = +\infty$. $K(x, y) = e^{-|x-y|}$. Ядро не является фредгольмовым: $P_K^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} dy = +\infty$. В самом

$$\text{деле: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-y|} dy = \int_{-\infty}^x e^{2(y-x)} dy + \int_x^{+\infty} e^{2(x-y)} dy = 1 \text{ (проверьте!).}$$

Отметим, что заменой переменных $x = \operatorname{tg} \xi$, $y = \operatorname{tg} \eta$ оператор $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy$ можно записать в виде интеграла на конечном про-

$$\text{межутке интегрирования: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\xi, \eta) \Phi(\eta) d\eta,$$

$$\text{где } V(\xi, \eta) = \exp \{-|\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \eta|\}, \Phi(\eta) = \frac{1}{\cos^2 \eta} \varphi(\operatorname{tg} \eta),$$

либо $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(\xi, \eta) \Psi(\eta) d\eta$, где $W(\xi, \eta) = \frac{1}{\cos^2 \eta} \exp \{-|\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \eta|\}$,

$\Psi(\eta) = \varphi(\operatorname{tg} \eta)$. ■

Пример 1.8.

Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок, а ядро имеет вид

$\mathcal{K}(x, y) = \frac{Q(x, y)}{|x - y|^\alpha}$, где $\alpha = \text{const}$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, причем функция $Q(x, y)$

непрерывна в замкнутом квадрате S ; тогда $|Q(x, y)| \leq M = \text{const} < \infty$.

Покажем, что ядро $\mathcal{K}(x, y)$ фредгольмово.

$$P_{\mathcal{K}}^2 \leq M^2 \int_a^b \int_a^b \frac{dx dy}{|x - y|^{2\alpha}} = M^2 \int_a^b \mathcal{I}(x) dx, \text{ где } \mathcal{I}(x) = \int_a^b \frac{dy}{|x - y|^{2\alpha}}.$$

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x \frac{dy}{(x - y)^{2\alpha}} + \int_x^b \frac{dy}{(y - x)^{2\alpha}} = \frac{1}{1 - 2\alpha} [(x - a)^{1-2\alpha} + (b - x)^{1-2\alpha}].$$

Отсюда видно, что функция $\mathcal{I}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а следовательно, ограничена: $|\mathcal{I}(x)| \leq C = \text{const} < \infty$. Поэтому $P_{\mathcal{K}}^2 \leq M^2 C(b - a) < \infty$. ■

Замечание 1.6.

Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок, а ядро имеет вид

$\mathcal{K}(x, y) = \frac{Q(x, y)}{|x - y|^\alpha}$, где $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, причем функция

$Q(x, y)$ ограничена в замкнутом квадрате S . Такое ядро $\mathcal{K}(x, y)$ называют ядром со слабой особенностью или полярным ядром.

Пример 1.8 показывает, что при $\alpha < \frac{1}{2}$ это ядро фредгольмово.

Свойства уравнений Фредгольма и уравнений со слабой особенностью ядра мало отличаются друг от друга. Основные результаты теории совпадают для уравнений обоих типов.

Уравнения со слабой особенностью ядра возникают и в случае, когда $\vec{x} \in \mathbb{R}^l$ и $\vec{y} \in \mathbb{R}^l$ (см. замечание 1.3). Пусть $|\vec{x} - \vec{y}|$ обозначает евклидово расстояние между точками $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Пусть $Q(\vec{x}, \vec{y})$ — ограни-

ченная на множестве $\Omega \times \Omega$ функция. Тогда ядро $\mathcal{K}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{Q(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}$,

где $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < l$, называют ядром со слабой особенностью.

Уравнения с такими ядрами возникают в теории потенциалов. ■

1.3. Примеры некоторых интегральных уравнений других типов.

1.3.1. Сингулярные уравнения.

Напомним определение главного значения интеграла в смысле Коши* (см. [23], гл.3, §3). Пусть функция $F(y)$ определена на отрезке $[a, b]$, кроме, быть может, точки c , $a < c < b$; пусть F интегрируема на любом отрезке, не содержащем c . Говорят, что F интегрируема по

* Коши Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик.

Коши, если существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} F(y)dy + \int_{c+\varepsilon}^b F(y)dy \right)$. Этот предел обозначают через $V.p. \int_a^b F(y)dy$ и называют главным значением интеграла.

Пример 1.9.

При $a < c < b$ несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dy}{c-y}$ расходится. Но существует $V.p. \int_a^b \frac{dy}{c-y} = \ln \frac{c-a}{b-c}$. (Проверьте!) ■

В теории интегральных уравнений интеграл в смысле главного значения по Коши называют сингулярным интегралом. Сингулярное интегральное уравнение — это уравнение, содержащее искомую функцию φ под знаком такого интеграла. Например, уравнение (1.1) будет сингулярным, если $K(x, y) = \frac{1}{x-y}$, т.е. $(A\varphi)(x) = V.p. \int_a^b \frac{\varphi(y)}{x-y} dy$. Возникает естественный вопрос: к каким функциям φ можно применить такой оператор A ?

Утверждение.

Пусть функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Гёльдера*: $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|^\beta$ для любых x_1, x_2 , где $L = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const}$, $0 < \beta \leq 1$. Тогда на интервале (a, b) существует $V.p. \int_a^b \frac{\varphi(y)}{x-y} dy$.

Доказательство.

$\frac{\varphi(y)}{x-y} = \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{x-y} + \frac{\varphi(x)}{x-y}$. По условию Гёльдера $\left| \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{x-y} \right| \leq \frac{L}{|x-y|^{1-\beta}}$. Поскольку $\beta > 0$, несобственный интеграл $\int_a^b \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{x-y} dy$ сходится. Кроме того,

$V.p. \int_a^b \frac{dy}{x-y} = \ln \frac{x-a}{b-x}$, $a < x < b$. Поэтому на интервале (a, b) существует $V.p. \int_a^b \frac{\varphi(y)}{x-y} dy = \int_a^b \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{x-y} dy + \varphi(x) \ln \frac{x-a}{b-x}$. ■

Если $Q(x, y)$ — ограниченная функция в квадрате S , то ядро $K(x, y) = \frac{Q(x, y)}{x-y}$ называют ядром с сильной особенностью. При этом

* Гёльдер Людвиг Отто (1859–1937) — немецкий математик.

от функции Q обычно требуют выполнения условия Гёльдера по двум переменным. Линейный интегральный оператор A с таким ядром K задается интегралом в смысле главного значения.

Пример 1.10.

$K(x, y) = \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2}$, $S = \{-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$. Здесь $K(x, y) = \frac{Q(x, y)}{x-y}$, где $Q(x, y) = (x-y) \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2}$ — ограниченная и дифференцируемая в S функция. (Проверьте!) ■

По сравнению с теорией уравнений Фредгольма теория сингулярных уравнений является значительно более сложной.

1.3.2. Уравнения Вольтерры*.

Линейное уравнение 2-го рода

$$\varphi(x) - \mu \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.2)$$

отличается от уравнения (1.1) переменным пределом интегрирования (возможны и случаи $a = -\infty, b = +\infty$). Здесь ядро $K(x, y)$ определено в замкнутом треугольнике $T = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$. Доопределим ядро в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$: положим $K(x, y) = 0$ при $x < y \leq b$. Тогда уравнение (1.2) можно рассматривать как частный случай уравнения (1.1).

Пусть ядро K удовлетворяет условию

$$P^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy = \int_a^b \left(\int_a^x |K(x, y)|^2 dy \right) dx < \infty \quad (\text{здесь предполагаются выполненными условия теоремы о замене двойного интеграла повторным}).$$

Например, условие $P < \infty$ выполнено, если ядро K непрерывно в T ; тогда K кусочно непрерывно в S . Пусть к тому же $f \in L_2[a, b]$; например, f — непрерывная функция. Тогда уравнение (1.2) называют уравнением Вольтерры. Оно является специальным случаем уравнения Фредгольма и обладает по сравнению с ним дополнительными свойствами.

Наряду с уравнением (1.2) важную роль играют и уравнения 1-го рода с переменным пределом интегрирования.

Пример 1.11.

Уравнение $\int_a^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x)$, $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, называют уравнением Абеля**. Это уравнение типа Вольтерры 1-го рода со сла-

*Вольтерра Вито (1860–1940) — итальянский математик.

**Абель Нильс Хенрик (1802–1829) — норвежский математик.

бой особенностью. Исторически оно было первым (1823г.) изученным интегральным уравнением (при $\alpha = 1/2$). ■

1.3.3. Уравнения с разностными ядрами.

Примеры таких уравнений уже были приведены выше. Разностное ядро — это сложная функция $\mathcal{K}(x - y)$, где $\mathcal{K}$ — функция одной независимой переменной. Интегральный оператор $(A\varphi)(x)$ с таким ядром называют оператором свертки. При надлежащих предположениях о функциях $\mathcal{K}$ и φ можно определить их свертки как функции переменной x на прямой, на луче, на конечном отрезке. Интегральные уравнения, содержащие оператор свертки, часто встречаются и в теоретических, и в прикладных задачах. Запишем некоторые из таких уравнений.

Простейший пример:

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(x - y)\varphi(y)dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Уравнения Вольтерры с разностными ядрами:

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^x \mathcal{K}(x - y)\varphi(y)dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\varphi(x) - \int_0^x \mathcal{K}(x - y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Уравнение Винера–Хопфа*:

$$\varphi(x) - \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x - y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Решение уравнений типа свертки обычно основано на применении к ним тех или иных интегральных преобразований (преобразования Фурье**, преобразования Лапласа*** и др.).

1.3.4. Интегральные уравнения 1-го рода, определяемые интегральными преобразованиями.

Задача обращения интегрального преобразования является задачей решения интегрального уравнения 1-го рода. Покажем это на примере преобразования Фурье, не записывая предположений, при которых эти преобразования существуют, и при которых их можно обратить (см. [23], гл. 10, §6; [24], гл. 8, §4).

Равенство $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\varphi(y)dy = f(x)$ означает, что функция

*Винер Норберт (1894–1964) — американский математик.

Хопф Хейнц (1894–1971) — швейцарский математик.

**Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) — французский математик.

***Лаплас Пьер Симон (1749–1827) — французский математик.

f (вообще — комплекснозначная) является преобразованием Фурье функции φ . Если это равенство рассматривать как уравнение относительно φ при заданной f , то решением такого уравнения будет

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y) dy.$$

Равенство $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(xy) \varphi(y) dy = f(x)$ означает, что f является косинус-преобразованием функции φ . Обратная задача: найти φ , если дана f . Её решение: $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(xy) f(y) dy$.

Равенство $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(xy) \varphi(y) dy = f(x)$ означает, что f является синус-преобразованием функции φ . Решение соответствующей обратной задачи: $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(xy) f(y) dy$.

Подчеркнём, что на практике условия, при которых справедливы формулы обращения, могут нарушаться, и что задача решения уравнения 1-го рода некорректна.

1.3.5. Нелинейные интегральные уравнения.

Так называют интегральные уравнения, в которые искомая функция φ входит нелинейно.

Пример 1.12.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dx} = F(x, \varphi(x)), \quad \varphi(a) = \varphi_0$$

сводится к интегральному уравнению $\varphi(x) = \varphi_0 + \int_a^x F(y, \varphi(y)) dy$. Если F зависит от φ нелинейно, то и интегральное уравнение нелинейно. Именно изучение этого интегрального уравнения проводилось в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений при доказательстве теорем существования и единственности решения задачи Коши. ■

Пример 1.13.

Пусть дана функция $\mathcal{K}(x, y; \varphi)$, непрерывная по совокупности трёх переменных при $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, $|\varphi| \leq h$ (a, b, h — постоянные). Тогда оператор Урысона* $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y; \varphi(y)) dy$ определён на всех функциях $\varphi \in C[a, b]$, для которых $\|\varphi\|_{C[a, b]} \leq h$. Для каждой

*Урысон Павел Самуилович (1898– 1924) — советский математик.

такой функции φ её образ $A\varphi \in C[a, b]$. Тем самым $Dom A \subset C[a, b]$ и $Ran A \subset C[a, b]$. Чтобы оператор Урысона был определён на всем пространстве $C[a, b]$, необходимо, чтобы функция $\mathcal{K}(x, y; \varphi)$ была определена при всех указанных значениях x и y , и при $-\infty < \varphi < +\infty$.

Уравнение $\varphi - \mu A\varphi = f$ с таким нелинейным оператором A называют уравнением Урысона. ■

Пример 1.14.

Частным случаем оператора Урысона является нелинейный интегральный оператор Гаммерштейна:

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) F(y, \varphi(y)) dy, \text{ где } \mathcal{K}(x, y) \text{ — фредгольмово ядро в квадрате } S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}, \text{ а } F(y, \varphi) \text{ — заданная функция, определенная при } a \leq y \leq b, -\infty < \varphi < +\infty \text{ и непрерывная по совокупности двух переменных. Такой оператор } A \text{ представляет собой последовательное применение двух операторов: } \psi(y) = F(y, \varphi(y)) \text{ и } \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \psi(y) dy. \blacksquare$$

Нелинейные уравнения намного сложнее линейных. Убедимся в этом на следующем простом примере.

Пример 1.15.

Сначала рассмотрим линейное однородное ($f(x) \equiv 0$) уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(x) = \mu \int_0^1 x^2 y \varphi(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.3)$$

При любом комплексном μ оно имеет тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Докажем, что нетривиальное решение уравнение (1.3) имеет только

при $\mu = 4$. Введём обозначение $p = \int_0^1 y \varphi(y) dy$. Тогда уравнение (1.3)

будет иметь вид $\varphi(x) = \mu x^2 p$, где p — постоянная, которая не зависит от x , но может зависеть от μ . Если $\mu = 0$, то (1.3) даёт $\varphi(x) \equiv 0$. Рассмотрим случай $\mu \neq 0$. Найдём $\mu \neq 0$ и $\varphi(x) \not\equiv 0$ из (1.3):

$$\varphi(x) = \mu x^2 p = \mu \int_0^1 x^2 y \mu y^2 p dy, \text{ т.е. } 1 = \mu \int_0^1 y^3 dy = \frac{\mu}{4}, \text{ и тем самым}$$

$\mu = 4$. Тогда уравнению $\varphi(x) = 4 \int_0^1 x^2 y \varphi(y) dy$ удовлетворяет любая функция вида $\varphi(x) = cx^2$, где c — произвольная постоянная, $c \neq 0$.

Теперь рассмотрим нелинейное уравнение Гаммерштейна:

$$\varphi(x) = \mu \int_0^1 x^2 y \varphi^2(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.4)$$

При любом комплексном μ оно имеет тривиальное решение. Докажем, что при любом $\mu \neq 0$ уравнение (1.4) имеет нетривиальное решение. Введем обозначение $p = \int_0^1 y \varphi^2(y) dy$. Тогда уравнение (1.4) будет иметь вид $\varphi(x) = \mu x^2 p$, где p — постоянная, которая не зависит от x , но может зависеть от μ . Если $\mu = 0$, то (1.4) даёт $\varphi(x) \equiv 0$. Рассмотрим случай $\mu \neq 0$. Найдём зависимость p от μ из (1.4): $\varphi(x) = \mu x^2 p = \mu \int_0^1 x^2 y \mu^2 y^4 p^2 dy$, т.е. $p = \mu^2 p^2 \int_0^1 y^5 dy = \frac{\mu^2 p^2}{6}$, и тем самым $p = \frac{6}{\mu^2}$ (или $p = 0$, и тогда $\varphi(x) \equiv 0$). Поэтому уравнение (1.4) при любом $\mu \neq 0$ имеет решение $\varphi(x) = \frac{6}{\mu^2} x^2$. ■

1.3.6. Относительная единственность решения.

Задача нахождения решения интегрального уравнения может считаться разумно поставленной только если указано, в каком классе функций это решение надо искать (например, в $C[a, b]$ или в $L_2[a, b]$). Тогда осмысленными становятся вопросы о существовании решения в данном классе функций и о единственности решения в данном классе функций.

Пример 1.16.

Рассмотрим линейное однородное уравнение 2-го рода с переменным пределом интегрирования: $\varphi(x) = \int_0^x y^{x-y} \varphi(y) dy$, $0 \leq x < +\infty$. Можно доказать, что среди непрерывных функций φ имеется единственное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Но легко проверить, что данному уравнению удовлетворяет бесконечное множество разрывных решений вида $\varphi(x) = cx^{x-1}$, где c — произвольная постоянная, $c \neq 0$. (Проверьте, что такие функции $\varphi(x)$ являются решениями, и что $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0+0} +\infty$.) ■

Глава 2.

Теория Фредгольма.

2.1. Формулировки теорем Фредгольма.

Теория Фредгольма изучает линейное интегральное уравнение 2-го рода $\varphi - \mu A\varphi \equiv (E - \mu A)\varphi = f$. Здесь A — интегральный оператор с фредгольмовым ядром: $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$, свободный член $f \in L_2[a, b]$, $\mu \in \mathbb{C}$, $a \leq x \leq b$.

Будем рассматривать сразу 4 уравнения на $[a, b]$:

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy = f(x) \quad (\varphi - \mu A\varphi = f), \quad (2.1)$$

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\overset{\circ}{\varphi}(y) dy = 0 \quad (\overset{\circ}{\varphi} - \mu A\overset{\circ}{\varphi} = 0), \quad (2.2)$$

$$\psi(x) - \bar{\mu} \int_a^b \overline{\mathcal{K}(y, x)} \psi(y) dy = g(x) \quad (\psi - \bar{\mu} A^* \psi = g), \quad (2.3)$$

$$\overset{\circ}{\psi}(x) - \bar{\mu} \int_a^b \overline{\mathcal{K}(y, x)} \overset{\circ}{\psi}(y) dy = 0 \quad (\overset{\circ}{\psi} - \bar{\mu} A^* \overset{\circ}{\psi} = 0). \quad (2.4)$$

Нулик над $\overset{\circ}{\varphi}$ или $\overset{\circ}{\psi}$ означает, что речь идет о решении однородного уравнения (2.2) или (2.4). В уравнении (2.3) свободный член $g \in L_2[a, b]$. Решения всех уравнений (2.1) — (2.4) ищем в классе функций $L_2[a, b]$. Отметим, что на самом деле будем обычно полагать, что ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b, \}$, что функции f и g непрерывны на $[a, b]$, и что решения $\varphi, \overset{\circ}{\varphi}, \psi, \overset{\circ}{\psi}$ ищем среди непрерывных функций; это не будет приводить к существенному ограничению общности. В уравнениях

(2.3), (2.4) введено обозначение $(A^*\psi)(x) = \int_a^b \overline{\mathcal{K}(y, x)}\psi(y)dy$.

Замечание 2.1.

Уравнения (2.1) — (2.4) не являются системой уравнений. Нас интересует уравнение (2.1), но его свойства выражаются через свойства остальных уравнений. ■

Введём некоторые понятия, связанные с уравнениями (2.1) — (2.4). Сначала отдельно рассмотрим уравнение (2.2). Очевидно, что при любом значении параметра μ уравнение (2.2) имеет тривиальное решение $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0$.

Определение 2.1.

Значение параметра $\mu \in \mathbb{C}$ называют правильным для оператора A (то же: для ядра $\mathcal{K}(x, y)$), если при этом значении μ уравнение (2.2) не имеет нетривиальных решений. ■

Очевидно, что $\mu = 0$ — правильное значение.

Определение 2.2.

Значение параметра $\mu \in \mathbb{C}$ называют характеристическим для оператора A (то же: для ядра $\mathcal{K}(x, y)$), если при этом значении μ уравнение (2.2) имеет нетривиальные решения. Такие нетривиальные решения называют собственными функциями оператора A (то же: ядра $\mathcal{K}(x, y)$), соответствующими характеристическому значению μ . ■

Уравнение (2.2) можно записать в виде $A\overset{\circ}{\varphi} = \lambda\overset{\circ}{\varphi}$. Если μ — характеристическое значение оператора A , то $\lambda = 1/\mu$ называют его собственным значением (то же: собственным значением ядра $\mathcal{K}(x, y)$). Ему соответствуют те же собственные функции. Однако, может оказаться, что и $\lambda = 0$ является собственным значением, если уравнение $A\varphi = 0$ имеет нетривиальные решения. В этом случае пишут $\varphi \in \text{Ker} A$, где $\text{Ker} A = \{\varphi | A\varphi = 0\}$ — нуль-множество или ядро оператора A .

Ясно, что собственная функция определена с точностью до ненулевого постоянного множителя: если $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ — собственная функция, то и $c \cdot \overset{\circ}{\varphi}(x)$, где $c = \text{const} \neq 0$, тоже будет собственной функцией, соответствующей тому же характеристическому числу.

Пусть одному и тому же характеристическому значению μ отвечают собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_1(x), \dots, \overset{\circ}{\varphi}_r(x)$; пусть $c_1, \dots, c_r$ — произвольные постоянные. Тогда в силу линейности оператора A линейная комбинация $c_1\overset{\circ}{\varphi}_1(x) + \dots + c_r\overset{\circ}{\varphi}_r(x)$ также будет собственной функцией оператора A , которая соответствует тому же характеристическому числу μ , если только эта линейная комбинация не равна тождественно нулю на $[a, b]$.

Определение 2.3.

Наибольшее число линейно независимых на $[a, b]$ собственных функций, отвечающих данному характеристическому значению μ , называют геометрической кратностью этого характеристического значения или его рангом. Характеристическое значение, геометрическая кратность которого равна 1, называют простым. ■

Геометрические кратности двух разных характеристических значений могут быть различны.

Пример 2.1.

$K(x, y) = \sin(x - y)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. Найдем все характеристические значения оператора $(A\varphi)(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x - y)\varphi(y)dy$. Нас интересуют те μ , при которых уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_0^{2\pi} \sin(x - y)\overset{\circ}{\varphi}(y)dy = 0 \quad (2.5)$$

имеет на $[0, 2\pi]$ нетривиальные решения. Запишем ядро $K(x, y)$ в виде $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$ и введем обозначения: $p_1 = \int_0^{2\pi} \cos y \cdot \overset{\circ}{\varphi}(y)dy$, $p_2 = \int_0^{2\pi} \sin y \cdot \overset{\circ}{\varphi}(y)dy$. Перепишем уравнение (2.5):

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu(p_1 \sin x - p_2 \cos x) = 0. \quad (2.6)$$

Умножим уравнение (2.6) на $\cos x$ и проинтегрируем:

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \overset{\circ}{\varphi}(x)dx - \mu p_1 \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx + \mu p_2 \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = 0.$$

Умножим уравнение (2.6) на $\sin x$ и проинтегрируем:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \overset{\circ}{\varphi}(x)dx - \mu p_1 \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx + \mu p_2 \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$

Учитывая, что $\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi$, получаем систему алгебраических уравнений относительно p_1 и p_2 :

$$\begin{cases} p_1 + \pi\mu p_2 = 0 \\ -\pi\mu p_1 + p_2 = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Найдём те $\mu \in \mathbb{C}$, при которых определитель основной матрицы системы (2.7) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi\mu \\ -\pi\mu & 1 \end{vmatrix} = 1 + \pi^2\mu^2 = 0, \text{ т.е. } \mu = \pm \frac{i}{\pi} \text{ (} i \text{ — мнимая единица). Если}$$

$\mu \neq \pm \frac{i}{\pi}$, то (2.7) имеет только нулевое решение $p_1 = p_2 = 0$, и тогда

из (2.6) получаем $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0$; все комплексные $\mu \neq \pm \frac{i}{\pi}$ правильные.

Если $\mu = \frac{i}{\pi}$, то общее решение системы (2.7) имеет вид $p_2 = ip_1$, где

p_1 — свободная неизвестная. При $\mu = -\frac{i}{\pi}$ общее решение (2.7) имеет

вид $p_2 = -ip_1$, где p_1 — свободная неизвестная. Найдём решения $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ уравнения (2.6) для каждого из двух характеристических значений μ :

если $\mu = \mu_1 = \frac{i}{\pi}$, то $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \frac{i}{\pi}(p_1 \sin x - ip_1 \cos x) =$
 $= c(\cos x + i \sin x) = ce^{ix}$, где $c = \frac{p_1}{\pi}$ — произвольная постоянная;

если $\mu = \mu_2 = -\frac{i}{\pi}$, то $\overset{\circ}{\varphi}(x) = -\frac{i}{\pi}(p_1 \sin x + ip_1 \cos x) =$
 $= c(\cos x - i \sin x) = ce^{-ix}$, где $c = \frac{p_1}{\pi}$ — произвольная постоянная.

Итак, ядро $\sin(x - y)$ в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ (то же: оператор $\int_0^{2\pi} \sin(x - y)\varphi(y)dy$) имеет два простых характеристических значения μ_1 и μ_2 . Числа $\lambda_1 = 1/\mu_1 = -\pi i$ и $\lambda_2 = 1/\mu_2 = \pi i$ являются собственными значениями. Им соответствуют собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_1(x) = e^{ix}$ и $\overset{\circ}{\varphi}_2(x) = e^{-ix}$. ■

Пример 2.2.

Пусть $\mathcal{K}(x)$ — всюду определённая действительная функция одной переменной, непрерывная, чётная, периодическая с периодом 2π . В квадрате $S = \{-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$ зададим симметричное разностное ядро $\mathcal{K}(x - y) = \mathcal{K}(y - x)$. Уравнение (2.2) в этом случае имеет вид

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x - y)\overset{\circ}{\varphi}(y)dy = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Рассмотрим задачу о нахождении характеристических значений ядра $\mathcal{K}(x - y)$, их геометрических кратностей и отвечающих им собственных функций.

Введём коэффициенты Фурье функции $\mathcal{K}(x)$:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x) \sin nx dx = 0$$

в силу чётности функции $\mathcal{K}$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Пользуясь 2π — периодичностью функции $\mathcal{K}$, найдём при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x - y) \cos ny dy = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \mathcal{K}(t) \cos(n(x - t)) dt =$$

$$= \pi c_n \cos nx + \pi s_n \sin nx = \pi c_n \cos nx; \quad \text{и при } n = 1, 2, \dots \text{ совершенно аналогично}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x - y) \sin ny dy = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \mathcal{K}(t) \sin(n(x - t)) dt =$$

$$= \pi c_n \sin nx - \pi s_n \cos nx = \pi c_n \sin nx.$$

Если все коэффициенты Фурье c_n функции $\mathcal{K}(x)$ отличны от нуля, то ядро $\mathcal{K}(x - y)$ имеет характеристические значения $\mu_n = \frac{1}{\pi c_n}$,

$n = 0, 1, 2, \dots$. При этом значению $\mu_0 = \frac{1}{c_0 \pi}$ отвечает одна собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}_0(x) \equiv 1, -\pi \leq x \leq \pi$. А для всех натуральных n

значению μ_n отвечают две линейно независимые собственные функции: $\overset{\circ}{\varphi}_{n,c}(x) = \cos nx$, $\overset{\circ}{\varphi}_{n,s} = \sin nx$. Других собственных функций в случае, когда все $c_n \neq 0$, быть не может, так как все вместе они образуют замкнутую (а, следовательно, полную) в $\widetilde{L}_2[-\pi, \pi]$ систему функций (см. [23], гл. 10, §3).

Если же, например, $c_{n_0} = 0$, то $\cos n_0 x$ и $\sin n_0 x$ уже не будут собственными функциями, отвечающими какому-либо характеристическому значению. В этом случае $\cos n_0 x$ и $\sin n_0 x$ соответствуют собственному значению $\lambda = 0$, т.е. принадлежат множеству $Ker A$. В главе 5 будет доказано, что если $\mathcal{K} \in L_2(S)$ и $A = A^*$, то $\varphi \in Ker A$ в том, и только в том случае, если для всех n функция φ ортогональна всем собственным функциям $\overset{\circ}{\varphi}_n$, отвечающим характеристическим числам μ_n . ■

Сравним ядро $\mathcal{K}(x, y)$ уравнений (2.1) и (2.2) с ядром $\overline{\mathcal{K}(y, x)}$ уравнений (2.3) и (2.4). Их называют сопряженными ядрами. Введем обозначение: $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$; если $\mathcal{K}(x, y)$ — действительная функция, то $\mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$. Напомним определение сопряженного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве. Пусть H — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ со скалярным произведением (такое пространство называют унитарным или комплексным евклидовым). Пусть A — действующий в H линейный оператор (обозначение: $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$). Оператор $A^* \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ называют сопряженным к оператору A , если для любых элементов φ и ψ пространства H выполнено равенство

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi). \quad (2.8)$$

Точно так же определяется сопряженный оператор и в бесконечномерном пространстве H . Отметим, однако, что в конечномерном случае автоматически выполнены равенства $Dom A = H$ и $Dom A^* = H$, а в бесконечномерном случае надо еще проверить, будет ли оператор A^* определен на всем пространстве; для интегральных операторов Фредгольма это выполнено. В качестве H сейчас рассматриваем простран-

ство $L_2[a, b]$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$. Проверим, что интегральный оператор A^* в уравнениях (2.3) и (2.4) удовлетворяет равенству (2.8). Пусть φ и ψ — произвольные функции из $L_2[a, b]$. $(A\varphi, \psi) =$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right) \overline{\psi(x)} dx = \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overline{\psi(x)} dx \right) \varphi(y) dy. \quad (2.9)$$

В последнем равенстве в (2.9) применена теорема об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле. Если функции $\mathcal{K}(x, y)$,

$\varphi(y)$ и $\psi(x)$ непрерывны, то это теорема из курса математического анализа (см. [23], гл. 2, §3). Если же повторные интегралы в (2.9) надо понимать в смысле Лебега, то речь идет о применении теоремы Фубини*, которая изучается в курсе функционального анализа (см. [24], гл. 5, §6). Далее часто придётся пользоваться указанными теоремами для изменения порядка интегрирования; не будем ссылаться на них всякий раз при выполнении этой операции. В правой части равенства (2.9) введем переобозначение: поменяем роли переменных x и y . Тогда

$$\begin{aligned}(A\varphi, \psi) &= \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(y, x) \overline{\psi(y)} dy \right) \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) \overline{\left(\int_a^b \mathcal{K}(y, x) \psi(y) dy \right)} dx = \\ &= \int_a^b \varphi(x) \overline{(A^*\psi)(x)} dx = (\varphi, A^*\psi).\end{aligned}$$

Уравнения (2.1) и (2.3) называют сопряжёнными неоднородными уравнениями. Свободные члены f и g в них могут быть любыми функциями из $L_2[a, b]$; f и g никак не связаны друг с другом. Уравнения (2.2) и (2.4) называют сопряжёнными однородными уравнениями.

Введем еще одно важное понятие. Ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и $\mathcal{K}(y, x)$ называют союзными или транспонированными; обозначение: $\mathcal{K}^T(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$. Уравнение

$$\psi(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(y, x) \psi(y) dy = h(x) \quad (2.10)$$

является аналогом уравнения (2.3), его называют союзным с уравнением (2.1). В союзном ядре, в союзном уравнении нет операции комплексного сопряжения. Если $h(x) = \overline{g(x)}$, а функция $\overline{\psi(x)}$ является решением сопряжённого к (2.1) уравнения (2.3), то $\overline{\psi(x)}$ будет решением союзного с (2.1) уравнения (2.10). И наоборот. Точно так же уравнение

$$\overset{\circ}{\psi}(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(y, x) \overset{\circ}{\psi}(y) dy = 0 \quad (2.11)$$

является аналогом уравнения (2.4), его называют союзным с уравнением (2.2). Если $\overset{\circ}{\psi}(x)$ — решение сопряжённого к (2.2) уравнения (2.4), то $\overset{\circ}{\psi}(x)$ — решение союзного с (2.2) уравнения (2.11). И наоборот.

Сформулируем теперь 4 теоремы, которые составляют содержание теории Фредгольма.

* Фубини Гвидо (1879–1943) — итальянский математик.

Теорема 2.1.

Оператор Фредгольма $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$ имеет либо конечное, либо счётное множество характеристических чисел $\{\mu_n\}$. Если этих чисел счётное множество, то $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (то же: $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$). ■

Теорема 2.1 (другая формулировка).

В любой ограниченной области комплексной μ -плоскости содержится не более чем конечное множество характеристических чисел μ_n оператора Фредгольма. ■

Теорема 2.2.

Если значение параметра μ правильное, то каждое из сопряжённых неоднородных уравнений (2.1) и (2.3) имеет одно и только одно решение, каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащие $L_2[a, b]$ (в том числе и $f(x) \equiv 0$, и $g(x) \equiv 0$). ■

Теорема 2.3.

Если значение параметра μ характеристическое, то сопряжённые однородные уравнения (2.2) и (2.4) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений. ■

Теорема 2.3 (другая формулировка).

Если μ является характеристическим числом оператора A (то же: ядра $\mathcal{K}(x, y)$), то $\bar{\mu}$ является характеристическим числом сопряжённого оператора A^* (то же: сопряжённого ядра $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$). Эти характеристические числа имеют одинаковые конечные ранги (т.е. каждому из них соответствует одно и то же конечное число линейно независимых собственных функций). ■

Теорема 2.4.

Чтобы неоднородное уравнение (2.1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(x)$ был ортогонален к любому решению сопряжённого однородного уравнения (2.4):

$$(f, \psi) = \int_a^b \overline{f(x)} \psi(x) dx. \blacksquare$$

Замечание 2.2.

У интегрального оператора Фредгольма может вовсе не оказаться характеристических значений. ■

Замечание 2.3.

В теореме 2.3 не утверждается, что отвечающие μ и $\bar{\mu}$ системы собственных функций операторов A и A^* совпадают. ■

Замечание 2.4.

Теорема 2.4 имеет содержательный смысл, когда μ — характеристическое значение оператора A . Если значение μ правильное, то теорема 2.4. становится тривиальной: в этом случае уравнение (2.4) в силу тео-

ремы 2.2 имеет только тривиальное решение $\overset{\circ}{\psi}(x) \equiv 0$. Поэтому для любой функции $f(x)$ будет $(f, \overset{\circ}{\psi}) = 0$. При этом по той же теореме 2.2 уравнение (2.1) разрешимо.

Если же значение μ характеристическое, то чтобы выяснить, разрешимо ли уравнение (2.1), надо выполнить конечное число проверок: $(f, \overset{\circ}{\psi}_j) \stackrel{?}{=} 0$, $j = 1, \dots, r$ (здесь r — общий ранг характеристических чисел μ и $\bar{\mu}$ операторов A и A^* соответственно, а $\overset{\circ}{\psi}_j$ — линейно независимые собственные функции оператора A^* , отвечающие $\bar{\mu}$). Если оказалось, что $f \perp \overset{\circ}{\psi}_j$ для всех этих собственных функций $\overset{\circ}{\psi}_j$, т.е. $f(x)$ ортогональна любому решению уравнения (2.4), то уравнение (2.1) разрешимо и имеет бесконечное множество решений. Действительно: если $\varphi(x)$ — решение уравнения (2.1), то его решением будет и функция $\varphi(x) + \overset{\circ}{\varphi}(x)$, где $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ — решение уравнения (2.2). А каждое решение уравнения (2.2) имеет вид $c_1 \overset{\circ}{\varphi}_1(x) + \dots + c_r \overset{\circ}{\varphi}_r(x)$ (здесь $\overset{\circ}{\varphi}_j$ — линейно независимые собственные функции оператора A , отвечающие характеристическому числу μ , а c_j — произвольные постоянные). Ясно также, что любые два решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ уравнения (2.1) отличаются на некоторое решение $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ уравнения (2.2): разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.2). ■

Замечание 2.5.

Из теорем Фредгольма вытекает утверждение, которое называют альтернативой Фредгольма:

— либо неоднородное уравнение (2.1) и сопряженное к нему неоднородное уравнение (2.3) имеют единственные решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, каковы бы ни были их правые части $f(x)$ и $g(x)$ (случай правильного μ);

— либо однородные уравнения (2.2) и (2.4) имеют нетривиальные решения, причём число линейно независимых решений конечно и одинаково для обоих уравнений (2.2) и (2.4) (случай характеристического μ). ■

Основная цель данной главы — доказать теоремы Фредгольма и изучить некоторые свойства возникающей при их доказательстве функции, которую называют резольвентой Фредгольма. Доказательства будем обычно проводить для непрерывных ядер. Но незначительные изменения делают эти доказательства справедливыми и для фредгольмовых ядер, не обязательно непрерывных.

Контрпример 2.1.

В примере 1.7 было показано, что если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то ядро $K(x, y) = e^{-|x-y|}$ не является фредгольмовым. Убедимся, что для

оператора $(A\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy$, действующего в классе ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ функций φ , не выполнена теорема 2.1. Пусть α — любое действительное число. Вычислим интеграл (i — мнимая единица):

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} e^{i\alpha y} dy = \int_{-\infty}^x e^{y-x} e^{i\alpha y} dy + \int_x^{+\infty} e^{x-y} e^{i\alpha y} dy = \frac{2}{\alpha^2 + 1} e^{i\alpha x}$ (проверьте!). Это значит, что однородное уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \overset{\circ}{\varphi}(y) dy = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

имеет характеристические значения $\mu = \frac{\alpha^2 + 1}{2}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Каждое действительное число $\mu \geq \frac{1}{2}$ является характеристическим. Значению $\mu = \frac{1}{2}$ отвечает ограниченная на $(-\infty, +\infty)$ собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 1$. Значению $\mu > \frac{1}{2}$ отвечают две ограниченные собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \exp\{\pm i\sqrt{2\mu - 1}x\}$ (или, что то же самое, две действительные собственные функции $\cos(\sqrt{2\mu - 1}x)$ и $\sin(\sqrt{2\mu - 1}x)$). Ни одна из собственных функций, отвечающих $\mu \geq \frac{1}{2}$, не принадлежит $L_2(-\infty, +\infty)$, т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} |\overset{\circ}{\varphi}(x)|^2 dx = +\infty$.

Если тот же интегральный оператор A рассматривать как действующий в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(-\infty, +\infty)$, то теорема 2.1 также не выполнена. В самом деле, при $\mu \neq 0$ продифференцируем два раза по x уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \left(e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y \overset{\circ}{\varphi}(y) dy + e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \overset{\circ}{\varphi}(y) dy \right) = 0;$$

тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$\overset{\circ}{\varphi}''(x) + (2\mu - 1)\overset{\circ}{\varphi}(x) = 0$ (проверьте!). Оно имеет линейно независимые решения $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \exp\{\pm i\sqrt{2\mu - 1}x\} = \exp\{\pm \sqrt{1 - 2\mu}x\}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq \frac{1}{2}$; при $\mu = \frac{1}{2}$ линейно независимыми решениями будут $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 1$ и $\overset{\circ}{\varphi}(x) = x$. Для одновременного существования интегралов $\int_{-\infty}^x e^y \overset{\circ}{\varphi}(y) dy$

и $\int_x^{+\infty} e^{-y} \overset{\circ}{\varphi}(y) dy$ необходимо выполнение неравенства $|\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2\mu}| < 1$

(докажите, что это неравенство означает $\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{2}(\operatorname{Im} \mu)^2$). Рассмотрим только $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда каждое значение $0 < \mu < +\infty$ является

характеристическим геометрической кратности 2: среди функций из $C^2(-\infty, +\infty)$, не обязательно ограниченных, такому значению μ соответствуют две собственные функции. Ни одна из этих собственных функций не принадлежит $L_2(-\infty, +\infty)$.

Если тот же интегральный оператор A рассматривать как действующий лишь на функции из $L_2(-\infty, +\infty)$, то ни одно из значений $0 < \mu < +\infty$ не является характеристическим. ■

Контрпример 2.2.

Напомним известные из курса математического анализа значения некоторых интегралов, зависящих от параметров x и α (их называют интегралами Лапласа; см. [15], Т.3, п. 716). Для любого числа $\alpha > 0$ выполнены следующие равенства:

$$\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-\alpha y} dy = \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}, \quad \int_0^{+\infty} \cos(xy) \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x}, \quad \text{где } x \geq 0; \quad (2.12)$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(xy) e^{-\alpha y} dy = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}, \quad \int_0^{+\infty} \sin(xy) \frac{y}{y^2 + \alpha^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x}, \quad \text{где } x > 0; \quad (2.13)$$

Из (2.12) вытекает, что уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_0^{+\infty} \mathcal{K}_c(x, y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy = 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.14)$$

с ядром $\mathcal{K}_c(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy)$ имеет характеристическое значение $\mu_1 = 1$, которому отвечает бесконечно много собственных функций $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha x} + \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$ (α — любое положительное число), и характеристическое значение $\mu_2 = -1$, которому отвечает бесконечно много собственных функций $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha x} - \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$ (проверьте!).

Из (2.13) вытекает, что уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_0^{+\infty} \mathcal{K}_s(x, y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (2.15)$$

с ядром $\mathcal{K}_s(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(xy)$ имеет характеристическое значение $\mu_1 = 1$, которому отвечает бесконечно много собственных функций

$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha x} + \frac{x}{x^2 + \alpha^2}$, и характеристическое значение $\mu_2 = -1$, которому отвечает бесконечно много собственных функций

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha x} - \frac{x}{x^2 + \alpha^2} \text{ (проверьте!).}$$

Ядра уравнений (2.14) и (2.15) не являются фредгольмовыми. Для этих уравнений не выполнена теорема 2.3 (в каком классе функций $\overset{\circ}{\varphi}$?) ■

Уравнения Фредгольма представляют собой наиболее простой тип интегральных уравнений. Для уравнений других видов (например, для сингулярных уравнений, для некоторых уравнений типа свёртки) теоремы Фредгольма могут нарушаться.

2.2. Ядро произведения интегральных операторов. Итерированные ядра.

Рассмотрим последовательное применение нескольких интегральных операторов (произведение операторов) и возведение оператора в натуральную степень. При выполнении этих операций снова будут получаться интегральные операторы; нас интересуют их ядра. В изучении произведений операторов и их ядер основную роль будет играть теорема об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле и о равенстве кратного интеграла повторному интегралу.

Пусть определены интегральные операторы $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy$ и $(B\varphi)(x) = \int_a^b L(x, y)\varphi(y) dy$. Будем полагать, что их ядра $\mathcal{K}$ и L фредгольмовы или даже непрерывны в замкнутом квадрате S . Ядра всех рассматриваемых здесь интегральных операторов считаем заданными в одном и том же квадрате S . Построим оператор AB (сначала к функции $\varphi(x)$ применяем B , затем к функции $(B\varphi)(t)$ применяем A):

$$\begin{aligned} (AB\varphi)(x) &= (A(B\varphi))(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t)(B\varphi)(t) dt = \\ &= \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \left(\int_a^b L(t, y)\varphi(y) dy \right) dt = \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(x, t)L(t, y) dt \right) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Как видно, оператор AB тоже интегральный, а его ядро $\mathbf{V}$ выражается через ядра операторов A и B :

$$(AB\varphi)(x) = \int_a^b \mathbf{V}(x, y)\varphi(y) dy, \quad \mathbf{V}(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t)L(t, y) dt. \quad (2.16)$$

Пусть имеется ещё интегральный оператор $(C\varphi)(x) = \int_a^b \mathbf{N}(x, y)\varphi(y) dy$; о его ядре $\mathbf{N}$ предполагаем то же, что в отношении ядер $\mathcal{K}$ и L . Докажем ассоциативность умножения операторов.

Утверждение 2.1.

$$(AB)C = A(BC). \quad (2.17)$$

Доказательство.

По формуле (2.16) имеем для операторов B и C :

$$(BC\varphi)(x) = \int_a^b \mathbf{W}(x, y)\varphi(y) dy, \text{ где } \mathbf{W}(x, y) = \int_a^b L(x, t)\mathbf{N}(t, y) dt.$$

Найдём выражение оператора $(AB)C$, изменяя порядок интегрирования по переменным y и τ , и переходя затем к двойному интегралу:

$$\begin{aligned} [(AB)C\varphi](x) &= \int_a^b \mathbf{V}(x, \tau)(C\varphi)(\tau) d\tau = \int_a^b \mathbf{V}(x, \tau) \left(\int_a^b \mathbf{N}(\tau, y)\varphi(y) dy \right) d\tau = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b \mathbf{V}(x, \tau)\mathbf{N}(\tau, y) d\tau \right] \varphi(y) dy = \int_a^b \left[\int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(x, t)L(t, \tau) dt \right) \mathbf{N}(\tau, y) d\tau \right] \varphi(y) dy = \\ &= \int_a^b \mathbf{U}(x, y)\varphi(y) dy, \text{ где } \mathbf{U}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \mathcal{K}(x, t)L(t, \tau)\mathbf{N}(\tau, y) d\tau dt. \end{aligned}$$

Точно так же найдём выражение оператора $A(BC)$:

$$\begin{aligned} [A(BC)\varphi](x) &= \int_a^b \mathcal{K}(x, t) [(BC)\varphi](t) dt = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \left[\int_a^b \mathbf{W}(t, y)\varphi(y) dy \right] dt = \\ &= \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \left[\int_a^b (L(t, \tau)\mathbf{N}(\tau, y) d\tau) \varphi(y) \right] dt = \\ &= \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \left[\int_a^b \left(\int_a^b L(t, \tau)\mathbf{N}(\tau, y) d\tau \right) \varphi(y) dy \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b \int_a^b \mathcal{K}(x, t)L(t, \tau)\mathbf{N}(\tau, y) d\tau dt \right] \varphi(y) dy = \int_a^b \mathbf{U}(x, y)\varphi(y) dy. \end{aligned}$$

В силу произвольности функции φ этим доказано равенство (2.17). ■

Ассоциативность умножения интегральных операторов позволяет писать ABC без скобок. Оказалось, что ABC — тоже интегральный оператор с ядром $\mathbf{U}(x, y)$.

Замечание 2.6.

В общем случае $\int_a^b \mathcal{K}(x, t)L(t, y) dt \neq \int_a^b L(x, t)\mathcal{K}(t, y) dt$, поэтому, вообще, $AB \neq BA$ (приведите пример!). Если для двух операторов справедливо равенство $AB = BA$, то говорят, что они коммутируют; это

значит, что для любой функции φ из общей области определения операторов AB и BA выполнено равенство $(AB)\varphi = (BA)\varphi$ (приведите пример!). ■

Замечание 2.7.

Ассоциативность умножения интегральных операторов позволяет ввести натуральную степень A^n для любого $n \in \mathbb{N}$. При этом для каждого $j = 1, \dots, n-1$ получаем $A^n = A^j A^{n-j}$. ■

Натуральные степени A^n являются интегральными операторами; найдём их ядра. Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ оператора A для дальнейшего единообразия записей будем обозначать $\mathcal{K}_1(x, y)$. Выбирая $B = A$ в (2.16), получим

$$(A^2\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}_2(x, y)\varphi(y) dy, \text{ где } \mathcal{K}_2(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_1(x, t)\mathcal{K}_1(t, y) dt.$$

Выбирая $B = A^2$ в (2.16), получим

$$(A^3\varphi)(x) = (AA^2\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}_3(x, y)\varphi(y) dy, \text{ где } \mathcal{K}_3(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_1(x, t)\mathcal{K}_2(t, y) dt.$$

Вообще, выбирая $B = A^{n-1}$ в (2.16), для каждого натурального $n > 1$ получим

$$(A^n\varphi)(x) = (AA^{n-1}\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y)\varphi(y) dy, \text{ где } \mathcal{K}_n(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_1(x, t)\mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt.$$

Разумеется, записывая $A^n = A^{n-1}A$, точно так же можно получить

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_{n-1}(x, t)\mathcal{K}_1(t, y) dt.$$

Утверждение 2.2.

Для любого натурального $n > 1$ при каждом $j = 1, \dots, n-1$ выполнено равенство

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_j(x, t)\mathcal{K}_{n-j}(t, y) dt. \quad (2.18)$$

Доказательство следует из ассоциативности произведения интегральных операторов. ■

Определение 2.4.

Ядро $\mathcal{K}_n(x, y)$ оператора A^n называют n -ым итерированным ядром по отношению к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ оператора A . ■

Итерированное ядро можно записать, например, в виде $(n-1)$ -кратного интеграла

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_a^b \dots \int_a^b \mathcal{K}(x, t_1)\mathcal{K}(t_1, t_2) \dots \mathcal{K}(t_{n-1}, y) dt_1 \dots dt_{n-1} \quad (2.19)$$

или в виде других комбинаций повторных и кратных интегралов.

Пример 2.3.

$a = 0, b = 1, \mathcal{K}(x, y) = e^{x-y}$. Тогда $\mathcal{K}_2(x, y) = \int_0^1 e^{x-t} e^{t-y} dt = e^{x-y}$,

и т.д.: все итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ совпадают с исходным ядром $\mathcal{K}(x, y)$. Это значит, что $A^2 = A$ и все $A^n = A$ при $n \in \mathbb{N}$. Такой оператор A называют идемпотентным.

Проверим непосредственно: $(A\varphi)(x) = \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy = p e^x$, где постоянная $p = \int_0^1 e^{-y} \varphi(y) dy$ определяется выбранной функцией φ . Тогда $(A^2\varphi)(x) = \int_0^1 e^{x-y} (A\varphi)(y) dy = \int_0^1 e^{x-y} p e^y dy = p e^x$. ■

Пример 2.4.

$a = 0, b = 1, \mathcal{K}(x, y) = xy$. Тогда $\mathcal{K}_2(x, y) = \int_0^1 (xt)(ty) dt = \frac{xy}{3}$,

$\mathcal{K}_3(x, y) = \int_0^1 (xt) \left(\frac{ty}{3} \right) dt = \frac{xy}{3^2}$, и вообще: $\mathcal{K}_n(x, y) = \frac{xy}{3^{n-1}}$. Проверьте для этого ядра $\mathcal{K}$ формулы (2.18) и (2.19). ■

Пример 2.5.

$a = 0, b = \pi, \mathcal{K}(x, y) = \sin x \cdot \cos y$. Такое ядро ортогонально самому себе, т.е. $\mathcal{K}_2(x, y) \equiv 0$ в квадрате S . В самом деле:

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_0^\pi (\sin x \cos t) (\sin t \cos y) dt = \sin x \cos y \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2t) dt = 0.$$

Очевидно, что $\mathcal{K}_n(x, y) \equiv 0$ в S для всех натуральных $n > 1$. Это значит, что A^2 и все A^n являются нулевыми операторами при $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Такой оператор A называют нильпотентным.

Проверим непосредственно: $(A\varphi)(x) = \int_0^\pi \sin x \cos y \varphi(y) dy = p \sin x$, где постоянная $p = \int_0^\pi \cos y \varphi(y) dy$ определяется выбранной функцией φ . Тогда $(A^2\varphi)(x) = \int_0^\pi \sin x \cos y (A\varphi)(y) dy = p \sin x \int_0^\pi \cos y \sin y dy = 0$, т.е. $A^2 = 0$.

Вообще, ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и $L(x, y)$ называют ортогональными, если выполнены два условия:

$$\int_a^b \mathcal{K}(x, t) L(t, y) dt \equiv 0 \text{ в квадрате } S, \text{ т.е. } AB = 0; \text{ и}$$

$$\int_a^b L(x, t) \mathcal{K}(t, y) dt \equiv 0 \text{ в квадрате } S, \text{ т.е. } BA = 0.$$

Ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и $L(x, y)$ называют полуортогональными, если выполнено только одно из этих двух условий; в этом случае либо $\begin{cases} AB = 0 \\ BA \neq 0 \end{cases}$, либо

$$\begin{cases} AB \neq 0 \\ BA = 0 \end{cases}. \text{ (Приведите примеры!) } \blacksquare$$

Задача 2.1.

$a = 0, b = 2\pi$. Пусть числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ абсолютно сходится.

$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(jx) \cos(jy)$. Докажите, что ядро $\mathcal{K}$ ортогонально самому себе.

Решение. Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(x, y) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(jx) \cos(jt) \right) \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell} \sin(\ell t) \cos(\ell y) \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} c_j c_{\ell} \sin(jx) \cos(jt) \sin(\ell t) \cos(\ell y) dt. \end{aligned}$$

По признаку Вейерштрасса* стоящий под знаком интеграла функциональный ряд сходится равномерно в квадрате S . Поэтому его можно проинтегрировать почленно по переменной t :

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} c_j c_{\ell} \sin(jx) \cos(\ell y) \cdot \int_0^{2\pi} \cos(jt) \sin(\ell t) dt \equiv 0 \text{ в квадрате } S, \text{ поскольку } \int_0^{2\pi} \cos(jt) \sin(\ell t) dt = 0 \text{ при всех натуральных } j \text{ и } \ell. \blacksquare$$

Напомним, что в пространстве $L_2[a, b]$ введено скалярное произведение $(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$, и что оператору A соответствует сопряжённый оператор A^* .

Утверждение 2.3.

Для фредгольмовых интегральных операторов A и B выполнено равенство

$$(AB)^* = B^* A^*. \quad (2.20)$$

Доказательство.

Выберем произвольные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принадлежащие $L_2[a, b]$. По определению сопряжённого оператора $(AB\varphi, \psi) = (\varphi, (AB)^*\psi)$ и $(AB\varphi, \psi) = (B\varphi, A^*\psi) = (\varphi, B^*A^*\psi)$. Отсюда

*Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897) — немецкий математик.

$(\varphi, [(AB)^* - B^*A^*] \psi) = 0$. Для выбранной функции $\psi(x)$ введём обозначение $\omega(x) = \{[(AB)^* - B^*A^*] \psi\}(x)$. Оказалось, что $\omega \perp \varphi$ для любой функции $\varphi \in L_2[a, b]$. В частности, можно выбрать $\varphi = \omega$; тогда $(\omega, \omega) = \int_a^b \omega(x) \overline{\omega(x)} dx = \int_a^b |\omega(x)|^2 dx = 0$. Отсюда следует, что ω является нулевым элементом в $L_2[a, b]$ ($\omega(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, если функция ω непрерывна). Итак, для любой функции $\psi \in L_2[a, b]$ функция $\{[(AB)^* - B^*A^*] \psi\}(x)$ является нулевым элементом, т.е. $(AB)^* - B^*A^* = 0$. ■

Следствие 2.1.

$(A^n)^* = (A^*)^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $(\mathcal{K}_n(x, y))^* = (\mathcal{K}^*(x, y))_n$, т.е. ядро, сопряжённое к n -му итерированному ядру, является n -ым итерированным ядром для сопряжённого ядра. ■

Утверждение 2.4.

Пусть μ — характеристическое значение ядра $\mathcal{K}(x, y)$ (т.е. оператора A), а $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ — соответствующая ему собственная функция. Тогда μ^n и $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ будут характеристическим значением и соответствующей ему собственной функцией итерированного ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ (т.е. оператора A^n) при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Уравнение (2.2) запишем в операторном виде: $\overset{\circ}{\varphi} = \mu A \overset{\circ}{\varphi}$. К обеим его частям применим оператор A и умножим полученное равенство на μ : $\mu A \overset{\circ}{\varphi} = \mu^2 A^2 \overset{\circ}{\varphi}$. В силу (2.2) имеем $\overset{\circ}{\varphi} = \mu^2 A^2 \overset{\circ}{\varphi}$. Индукция по n даёт $\overset{\circ}{\varphi} = \mu^n A^n \overset{\circ}{\varphi}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Задача 2.2.

Проведите доказательство утверждения 2.4 в терминах интегральных уравнений и итерированных ядер. ■

Утверждение 2.5.

Если ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и $L(x, y)$ интегральных операторов A и B непрерывны в замкнутом квадрате S , то и ядра интегральных операторов AB и BA непрерывны в S .

Доказательство следует из формулы для ядра произведения интегральных операторов. ■

Следствие 2.2.

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S , то при каждом $n \in \mathbb{N}$ итерированное ядро $\mathcal{K}_n(x, y)$ тоже непрерывно в S . Если при этом $M = \max_S |\mathcal{K}(x, y)|$, то справедлива оценка $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq M^n (b - a)^{n-1}$.

Доказательство следует из формулы (2.19). ■

Следствие 2.3.

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S , а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция

$(A^n f)(x)$ тоже непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство следует из непрерывности ядер $\mathcal{K}_n(x, y)$. ■

Утверждение 2.6.

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ фредгольмово в квадрате S , а функция $f \in L_2[a, b]$, то и функция $Af \in L_2[a, b]$.

Доказательство.

При фиксированном x запишем неравенство Коши–Буняковского* для функций, зависящих от y (x рассматриваем как параметр):

$$|(Af)(x)| = \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right| \leq \left(\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Обе части неравенства (2.21) возведём в квадрат и проинтегрируем по x на отрезке $[a, b]$:

$$\|Af\|_{L_2[a, b]}^2 = \int_a^b \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right|^2 dx \leq P_{\mathcal{K}}^2 \cdot \|f\|_{L_2[a, b]}^2,$$

где $P_{\mathcal{K}}^2 = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty$. Отсюда если $\|f\|_{L_2[a, b]} < \infty$, то и $\|Af\|_{L_2[a, b]} < \infty$. ■

Замечание 2.8.

Существование интегралов $\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$, $\int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy$ и $\int_a^b \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right|^2 dx$ в смысле Лебега в доказательстве утверждения 2.6 требует обоснования при помощи теорем функционального анализа. Из условий утверждения 2.6 следует, что первые два из указанных интегралов, зависящие от параметра x , существуют при почти всех $x \in [a, b]$, т.е. всюду на $[a, b]$, кроме, быть может, множества точек x , мера Лебега которого равна нулю. ■

Утверждение 2.7.

Если интегральные операторы A и B фредгольмовы (т.е. их ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и $L(x, y)$ являются функциями класса $L_2(S)$, и операторы A и B действуют в пространстве $L_2[a, b]$), то операторы AB и BA тоже фредгольмовы. При этом справедливы неравенства

$$P_{AB} \leq P_A \cdot P_B \quad \text{и} \quad P_{BA} \leq P_A \cdot P_B. \quad (2.22)$$

(В неравенствах (2.22) вместо принятых ранее обозначений $P_{\mathcal{K}}$, P_L использованы обозначения P_A , P_B и т.д.)

*Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) — русский математик.

Доказательство основано на применении неравенства Коши–Буняковского. ■

Следствие 2.4.

Если интегральный оператор A фредгольмов, то при каждом $n \in \mathbb{N}$ оператор A^n тоже фредгольмов (т.е. если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ оператора A фредгольмово, то итерированное ядро $\mathcal{K}_n(x, y)$ тоже фредгольмово). При этом $P_{\mathcal{K}_n} \leq (P_{\mathcal{K}})^n$. ■

2.3. Построение решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода методом последовательных приближений. Понятие о резольvente Фредгольма.

2.3.1. Метод последовательных приближений в $C[a, b]$ и в $L_2[a, b]$.

Построим последовательность функций, приближающих на отрезке $[a, b]$ решение φ уравнения (2.1). В качестве начального приближения возьмём функцию $\varphi_0(x) = f(x)$; приближения к решению будем строить по рекуррентной формуле

$$\varphi_m(x) = f(x) + \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi_{m-1}(y) dy, \quad a \leq x \leq b, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.23)$$

Коротко: решение уравнения $\varphi = f + \mu A\varphi$ приближаем итерациями $\varphi_m = f + \mu A\varphi_{m-1}$, $\varphi_0 = f$.

Теорема 2.5.

Пусть в уравнении (2.1) ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S , и $M = \max_S |\mathcal{K}(x, y)|$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если $M \neq 0$ (т.е. $A \neq 0$), и

$$|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad (2.24)$$

то непрерывное на $[a, b]$ решение $\varphi(x)$ уравнения (2.1) существует, непрерывное решение единственно, последовательные приближения $\varphi_m(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходятся к $\varphi(x)$ при $m \rightarrow +\infty$.

Доказательство.

Последовательно применяя рекуррентную формулу (2.23) и учитывая выбор начального приближения, запишем φ_m в явном виде:

$$\varphi_m = f + \mu A\varphi_{m-1} = f + \mu A(f + \mu A\varphi_{m-2}) = f + \mu Af + \mu^2 A^2\varphi_{m-2} = \dots = f + \mu Af + \mu^2 A^2f + \dots + \mu^m A^m f.$$

Тем самым функция $\varphi_m(x)$ является m -ой частичной суммой

функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n (A^n f)(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy, \quad (2.25)$$

где $A^0 = E$ — тождественный оператор. Ряд (2.25) называют рядом Неймана*. Оценим общий член этого ряда при $n \geq 1$, учитывая следствие 2.2:

$$\left| \mu^n \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy \right| \leq |\mu|^n \int_a^b |\mathcal{K}_n(x, y)| |f(y)| dy \leq \\ \leq |\mu|^n M^n (b-a)^{n-1} M_f (b-a), \text{ где } M_f = \max_{[a,b]} |f(y)| = \|f\|_{C[a,b]}. \text{ Функ-} \\ \text{циональный ряд (2.25) мажорируется числовым рядом}$$

$$M_f \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|^n M^n (b-a)^n. \quad (2.26)$$

Если значение параметра μ удовлетворяет неравенству (2.24), то числовой ряд (2.26) сходится, поскольку представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|\mu| M (b-a) < 1$. Тогда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (2.25) сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то при каждом натуральном n функция $(A^n f)(x)$ тоже непрерывна на $[a, b]$, т.к. ядро $\mathcal{K}$ оператора A непрерывно, и по следствию 2.2 все итерированные ядра $\mathcal{K}_n$ непрерывны. Все члены равномерно сходящегося функционального ряда (2.25) суть непрерывные функции, поэтому и его сумма $\varphi(x)$ — непрерывная функция. Итак, $\{\varphi_m(x)\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi(x)$ на $[a, b]$, $\varphi \in C[a, b]$.

В аргументах φ_m и φ заменим x на y ; тогда при каждом $x \in [a, b]$ $\{\mathcal{K}(x, y) \varphi_m(y)\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y)$ по переменной y на $[a, b]$. Поэтому в формуле (2.23) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$, вычисляя этот предел под знаком интеграла: $\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$,

$a \leq x \leq b$. Этим доказано, что $\varphi(x)$ — решение уравнения (2.1).

Докажем, что уравнение (2.1) не имеет других непрерывных решений. Предположим, что функция $\theta(x)$ является непрерывным решением уравнения (2.1) на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $\omega(x) = \varphi(x) - \theta(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.2):

$$\omega(x) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy. \text{ Если } \omega(x) \not\equiv 0, \text{ то}$$

*Нейман Карл Готфрид (1832–1925) — немецкий математик.

$$\max_{[a,b]} |\omega(x)| = |\mu| \max_{[a,b]} \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy \right| \leq |\mu| M(b-a) \max_{[a,b]} |\omega(x)| < \max_{[a,b]} |\omega(x)| - \text{противоречие.} \blacksquare$$

Задача 2.3.

Докажите, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x)$ при выполнении условий теоремы 2.5 не зависит от выбора начального приближения: в качестве φ_0 можно взять произвольную непрерывную функцию. (Это еще раз доказывает единственность непрерывного решения φ .) $\blacksquare$

Замечание 2.9.

Теорема 2.5 не утверждает, что уравнение (2.1) не может иметь других, разрывных решений. $\blacksquare$

Рассмотрим вопросы о существовании и о единственности решения уравнения (2.1) в более широком, чем $C[a, b]$, классе функций $L_2[a, b]$.

Утверждение 2.8.

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S , а функция $\varphi \in L_2[a, b]$, то функция $A\varphi$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in [a, b]$. Функция $\mathcal{K}(x, y)$, непрерывная в замкнутом квадрате S , равномерно непрерывна в S . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)| < \varepsilon$ сразу для всех $y \in [a, b]$. Отсюда получаем неравенство

$$|(A\varphi)(x) - (A\varphi)(x_0)| = \left| \int_a^b (\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)) \varphi(y) dy \right| < \varepsilon \int_a^b |\varphi(y)| dy \leq \varepsilon (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}; \text{ поскольку } \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \text{ то из}$$

этого неравенства и следует непрерывность функции $A\varphi$ в точке x_0 . (Последняя оценка является применением неравенства Коши–Буняковского для функций $|\varphi(y)|$ и 1, которое означает, что если $\varphi \in L_2[a, b]$, то $\int_a^b |\varphi(y)| dy < \infty$, т.е. $\varphi \in L_1[a, b]$. Здесь важна конечность меры Лебега отрезка $[a, b]$.) $\blacksquare$

Замечание 2.10.

Из утверждения 2.8 следует, что если при непрерывных $\mathcal{K}$ и f искать решение уравнения (2.1) в классе функций $L_2[a, b]$, то таким решением может быть только непрерывная функция. Действительно, если решение $\varphi \in L_2[a, b]$, то из уравнения $\varphi = f + \mu A\varphi$, в котором f и $A\varphi$ непрерывны, следует непрерывность φ . $\blacksquare$

Замечание 2.11.

Можно попытаться ослабить условия теоремы 2.5, из которых следовала сходимость ряда Неймана (2.25). Например, можно потребовать, чтобы ядро $\mathcal{K}$ было фредгольмовым (не обязательно непрерывным): $P^2 = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty$, а вместо условия (2.24) потре-

бовать выполнения неравенства $|\mu| < \frac{1}{P}$. Оказывается, что в этом случае ряд (2.25) будет сходиться в среднем квадратическом на $[a, b]$, но не обязательно равномерно. Пользуясь сходимостью ряда (2.25) в среднем квадратическом, можно доказать, что при любом свободном члене $f \in L_2[a, b]$ уравнение (2.1) имеет единственное решение в классе функций $L_2[a, b]$, теперь уже не обязательно непрерывное (см. [4], гл. 1, §2; [2], гл. 1, п. 25).

Чтобы получить всё же равномерную на $[a, b]$ сходимость ряда (2.25), вместе с фредгольмовостью ядра $\mathcal{K}$ подчиним его в следующей теореме дополнительному условию. ■

Теорема 2.6.

Пусть в уравнении (2.1) ядро $\mathcal{K}(x, y)$ фредгольмово и удовлетворяет условию

$$\sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy < \infty. \quad (2.27)$$

Пусть функция $f \in L_2[a, b]$. Если $P \neq 0$ (т.е. $A \neq 0$), и

$$|\mu| < \frac{1}{P}, \quad (2.28)$$

то последовательные приближения (2.23) сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$, предел этих последовательных приближений $\varphi \in L_2[a, b]$ и является решением уравнения (2.1), в классе функций $L_2[a, b]$ это решение единственно.

Доказательство.

По следствию 2.4 для фредгольмова ядра $\mathcal{K}(x, y)$ все его итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ также фредгольмовы; тогда по утверждению 2.6 если $f \in L_2[a, b]$, то $A^n f \in L_2[a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому методом последовательных приближений сейчас строим функции $\varphi_m \in L_2[a, b]$.

Оценим общий член ряда Неймана (2.25) при $n \geq 1$ в условиях данной теоремы. Подобно (2.21) при фиксированном x запишем неравенство Коши–Буняковского для функций, зависящих от y (x рассматриваем как параметр):

$$\left| \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy \right| \leq \left(\int_a^b |\mathcal{K}_n(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Для $n > 1$ запишем $\mathcal{K}_n(x, y)$ по формуле (2.18) при $j = n - 1$ и применим неравенство Коши–Буняковского для функций, зависящих от t (x и y рассматриваем как параметры):

$$|\mathcal{K}_n(x, y)|^2 = \left| \int_a^b \mathcal{K}_{n-1}(x, t) \mathcal{K}(t, y) dt \right|^2 \leq \int_a^b |\mathcal{K}_{n-1}(x, t)|^2 dt \cdot \int_a^b |\mathcal{K}(t, y)|^2 dt.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по y на отрезке $[a, b]$ и заменим повторный интеграл двойным; тогда, вводя обозначение

$$C_n = \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |\mathcal{K}_n(x, y)|^2 dy, \text{ получим}$$

$$\int_a^b |\mathcal{K}_n(x, y)|^2 dy \leq \int_a^b |\mathcal{K}_{n-1}(x, t)|^2 dt \cdot \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t, y)|^2 dt dy \leq C_{n-1} P^2.$$

Вычисляя точную верхнюю грань по $x \in [a, b]$ в левой части этого неравенства, приходим к рекуррентному неравенству $C_n \leq P^2 C_{n-1}$. Отсюда следует оценка $C_n \leq P^{2n-2} C_1$ (Докажите! То, что все $C_n < \infty$, следует из условия (2.27) и полученной оценки). Теперь, возводя обе части неравенства (2.29) в квадрат, имеем

$$|(A^n f)(x)|^2 = \left| \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy \right|^2 \leq C_n \|f\|_{L_2[a, b]}^2 \leq P^{2n-2} C_1 \|f\|_{L_2[a, b]}^2;$$

для $n = 1$ такое неравенство выполнено в силу (2.27). Итак, при всех $n \geq 1$ получена оценка модулей членов ряда (2.25):

$$|\mu^n (A^n f)(x)| \leq |\mu|^n P^n C_1^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2[a, b]} \cdot \frac{1}{P} = \text{const} \cdot (P|\mu|)^n; \text{ ряд (2.25)}$$

мажорируется суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $P|\mu| < 1$ согласно условию (2.28).

По признаку Вейерштрасса ряд (2.25) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, т.е. функциональная последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ равномерно на $[a, b]$ сходится к некоторой функции $\varphi(x)$. Эта предельная функция является решением уравнения (2.1): в рекуррентной формуле (2.23) можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ под знаком интеграла. В самом деле, по неравенству Коши–Буняковского (при фиксированном x) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi_m(y) dy - \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right| \leq \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)| |\varphi_m(y) - \varphi(y)| dy \leq \\ & \leq \left(\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |\varphi_m(y) - \varphi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq C_1^{\frac{1}{2}} \sup_{[a, b]} |\varphi_m(y) - \varphi(y)| (b-a)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Из равномерной сходимости $\{\varphi_m\}$ к φ следует сходимость $\{\varphi_m\}$ к φ в среднем квадратическом, и тогда в силу полноты пространства $L_2[a, b]$

получаем $\varphi \in L_2[a, b]$.

Докажем, что уравнение (2.1) не имеет других решений в $L_2[a, b]$. Предположим, что функция $\theta(x)$ является решением уравнения (2.1), $\theta \in L_2[a, b]$. Тогда функция $\omega(x) = \varphi(x) - \theta(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.2): $\omega(x) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\omega(y)dy$. По неравенству Коши–Буняковского (при фиксированном x) имеем

$$|\omega(x)|^2 = |\mu|^2 \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\omega(y)dy \right|^2 \leq |\mu|^2 \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \cdot \|\omega\|_{L_2[a, b]}^2. \quad (2.30)$$

Интегрируя обе части неравенства (2.30) по x на $[a, b]$ и заменяя повторный интеграл двойным, получаем $\|\omega\|_{L_2[a, b]}^2 \leq |\mu|^2 P^2 \|\omega\|_{L_2[a, b]}^2$, т.е. $(1 - P^2|\mu|^2) \|\omega\|_{L_2[a, b]}^2 \leq 0$. Отсюда $\|\omega\|_{L_2[a, b]} = 0$ в силу условия (2.28). Но это значит, что ω — нулевой элемент пространства $L_2[a, b]$. ■

Пример 2.6.

$a = 0$, $b = 1$, $\mu = 1$, $\mathcal{K}(x, y) = xy^2$, $f(x) \equiv 1$. Для данного ядра $P = \frac{1}{\sqrt{15}}$; ядро $\mathcal{K}$ фредгольмово и даже непрерывно в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $M = 1$. Но применить теорему 2.5 к уравнению $\varphi(x) - \int_0^1 xy^2 \varphi(y)dy = 1$ нельзя: условие (2.24) не выполнено.

Условия (2.27) и (2.28) выполнены, поэтому теорема 2.6 применима. Согласно замечанию 2.10 решение φ непрерывно. Постройте последовательные приближения $\{\varphi_m\}$ и найдите решение интегрального уравнения $\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m$. Подставляя функцию φ в уравнение, убедитесь, что получено его решение.

Очевидно, что в данном примере решение φ можно искать другим способом — в виде $\varphi(x) = 1 + px$ где $p = \int_0^1 y^2 \varphi(y)dy = \text{const}$. Подставляя φ в уравнение, найдите p . ■

Пример 2.7.

$a = 0$, $b = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\mathcal{K}(x, y) = xy$, $f(x) = \frac{5}{6}x$. Данное ядро непрерывно в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $M = 1$. Условие (2.24) выполнено, теорема 2.5 применима. В качестве начального приближения выберем $\varphi_0(x) \equiv 0$ (см. замечание 2.3). Постройте последовательные приближения $\{\varphi_m\}$ и найдите решение $\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m$ интегрального

уравнения $\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 xy \varphi(y)dy = \frac{5}{6}x$. Выберите другое начальное приближение $\varphi_0(x) = x$ и постройте $\{\varphi_m\}$.

Найдите решение φ другим способом — в виде $\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{p}{2}x$ где $p = \int_0^1 y\varphi(y)dy = \text{const.}$ ■

Контрпример 2.3.

Условия теорем 2.5 и 2.6 не являются необходимыми для существования и единственности решения уравнения (2.1) в выбранных классах функций. Так, для уравнения $\varphi(x) - \int_0^1 (x+y)\varphi(y)dy = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq 1$, не выполнены ни условие (2.24), ни условие (2.28) ($\mu = 1$, $M = 2$, $P = \sqrt{\frac{7}{6}}$). Однако, уравнение имеет единственное непрерывное решение $\varphi(x) = x$ (проверьте!). ■

Замечание 2.12.

Если функцию f считать фиксированной, то можно ввести отображение B , зависящее от параметра μ : $B\varphi = \mu A\varphi + f$. Решение уравнения $\varphi = B\varphi$ называют неподвижной точкой отображения B . В теореме 2.5 доказано, что при выполнении условия (2.24) отображение B имеет в пространстве $C[a, b]$ единственную неподвижную точку. В теореме 2.6 доказано, что при выполнении условия (2.28) отображение B имеет в пространстве $L_2[a, b]$ единственную неподвижную точку.

Многие математические задачи можно свести к поиску неподвижных точек некоторого отображения, вообще говоря — нелинейного. Среди теорем о неподвижных точках наиболее простой и чаще всего применяемой является теорема, называемая принципом сжимающих отображений. Чтобы сформулировать эту теорему, напомним, что метрическое пространство Φ — это множество, в котором определено расстояние $\rho(\varphi, \eta)$ между любыми его элементами φ и η . Наличие расстояния во множестве Φ позволяет ввести в Φ понятие фундаментальной последовательности его элементов $\{\varphi_m\}$ и понятие сходимости последовательности $\{\varphi_m\}$ к элементу φ . Если всякая фундаментальная в Φ последовательность имеет принадлежащий Φ предел, то такое метрическое пространство Φ называют полным. Примерами полных метрических пространств являются $C[a, b]$ с расстоянием $\rho(\varphi, \eta) = \|\varphi - \eta\|_{C[a, b]}$ и $L_2[a, b]$ с расстоянием $\rho(\varphi, \eta) = \|\varphi - \eta\|_{L_2[a, b]}$. Отображение $B : \Phi \rightarrow \Phi$ называют сжимающим, если существует такое число α , $0 \leq \alpha < 1$, что для любых двух элементов φ и η выполнено неравенство $\rho(B\varphi, B\eta) \leq \alpha\rho(\varphi, \eta)$. Принцип сжимающих отображений утверждает, что если сжимающее отображение $B : \Phi \rightarrow \Phi$ действует в полном метрическом пространстве Φ , то оно имеет в нём неподвижную точку, и притом единственную; в этом случае последовательность

$\{\varphi_m\}$ метода последовательных приближений* $\varphi_m = B\varphi_{m-1}$ сходится к неподвижной точке при любом начальном приближении φ_0 . Принцип сжимающих отображений применяют для доказательства существования и единственности решений различных интегральных уравнений (как линейных, так и нелинейных) и для построения приближений к решению. Подробно эти вопросы изучаются в курсе функционального анализа.

В условиях теоремы 2.5 отображение B действует в пространстве $C[a, b]$, и для него справедливо неравенство $\|B\varphi - B\eta\|_{C[a, b]} \leq |\mu|M(b-a)\|\varphi - \eta\|_{C[a, b]}$ (докажите!). Если μ удовлетворяет условию (2.24), то B — сжимающее отображение.

В условиях теоремы 2.6 отображение B действует в пространстве $L_2[a, b]$, и для него справедливо неравенство $\|B\varphi - B\eta\|_{L_2[a, b]} \leq |\mu|P\|\varphi - \eta\|_{L_2[a, b]}$ (докажите!); условие (2.27) для этого не требуется. Если μ удовлетворяет неравенству (2.28), то B — сжимающее отображение; в этом случае последовательные приближения $\{\varphi_m\}$ сходятся к неподвижной точке φ в смысле расстояния в $L_2[a, b]$. Если же выполнено и условие (2.27), то последовательность $\{\varphi_m\}$ сходится к φ равномерно на $[a, b]$; можно доказать, что при выполнении (2.27) из ограниченности свободного члена f в уравнении (2.1) следует ограниченность его решения (см. [14], гл. 2, §1).

Принцип сжимающих отображений не является необходимым условием существования или единственности неподвижной точки. ■

Замечание 2.13.

Из теоремы 2.5 следует, что для решения φ уравнения (2.1) выполнено неравенство $\|\varphi\|_{C[a, b]} \leq (1 - |\mu|M(b-a))^{-1}\|f\|_{C[a, b]}$ (докажите!). Этим доказано, что для комплексных μ из круга (2.24) существует обратный оператор $(E - \mu A)^{-1}$, и что этот обратный оператор непрерывен как действующий из $C[a, b]$ в $C[a, b]$ (определение непрерывного оператора см. в главе 4).

Из теоремы 2.6 следует, что для решения φ уравнения (2.1) выполнено неравенство $\|\varphi\|_{L_2[a, b]} \leq (1 - |\mu|P)^{-1}\|f\|_{L_2[a, b]}$ (докажите!). Этим доказано, что для комплексных μ из круга (2.28) существует обратный оператор $(E - \mu A)^{-1}$, и что этот обратный оператор непрерывен как действующий из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$. ■

Замечание 2.14.

Если в теореме 2.5 (в теореме 2.6) положить $f(x) \equiv 0$ ($f = 0$ — нулевой элемент в $L_2[a, b]$), то получим однородное уравнение (2.2). Из доказанной в этих теоремах единственности решения $\varphi(x) \equiv 0$ ($\varphi = 0$ — нулевой элемент в $L_2[a, b]$) следует, что внутри круга (2.24) (внутри круга (2.28)) все значения $\mu \in \mathbb{C}$ правильные. ■

* Общую форму метода последовательных приближений придал Пикар.
Пикар Шарль Эмиль (1856–1941) — французский математик.

2.3.2. Понятие о резольвенте Фредгольма.

Ядру $\mathcal{K}(x, y)$ поставим в соответствие функцию $\Gamma(x, y; \mu)$, которая позволит построить интегральное представление решения уравнения (2.1). Пусть для определённости ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S . Тогда по следствию 2.2 все итерированные ядра $\mathcal{K}_n$ непрерывны в S , и справедливы неравенства $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq M^n(b-a)^{n-1}$, $M = \max_S |\mathcal{K}(x, y)|$. Будем рассматривать пока лишь значения параметра μ , удовлетворяющие условию (2.24). Тогда функциональный ряд

$$\Gamma(x, y; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \mathcal{K}_n(x, y) \quad (2.31)$$

мажорируется сходящимся числовым рядом $M \sum_{n=1}^{\infty} (|\mu| M(b-a))^{n-1}$ — суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $|\mu| M(b-a) < 1$. При фиксированном μ из круга (2.24) ряд (2.31) сходится по признаку Вейерштрасса абсолютно и равномерно на S , поэтому его сумма $\Gamma(x, y; \mu)$ является непрерывной на S функцией переменных x, y . Если же фиксировать точку $(x, y) \in S$, то (2.31) будет степенным рядом по степеням переменной $\mu \in \mathbb{C}$, сходящимся в круге (2.24); поэтому его сумма $\Gamma(x, y; \mu)$ в этом круге является голоморфной (аналитической) функцией переменной μ . Функцию $\Gamma(x, y; \mu)$ называют резольвентой Фредгольма.

Умножим (2.31) на непрерывную функцию $f(y)$ и проинтегрируем по переменной y на $[a, b]$; равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно:

$$\int_a^b \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy. \quad (2.32)$$

Сравнивая (2.32) с рядом Неймана (2.25), дающим решение $\varphi(x)$ уравнения (2.1) получаем интегральное представление решения

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy. \quad (2.33)$$

Формула (2.33) обоснована пока лишь для значений μ из круга (2.24); ещё не ясно, будет ли она справедлива при других μ .

Определение 2.5.

Говорят, что при данном $\mu \in \mathbb{C}$ интегральное уравнение (2.1) имеет резольвенту $\Gamma(x, y; \mu)$, если это уравнение при любом свободном члене

$f(x)$ из выбранного класса функций имеет решение, и притом единственное, и если это решение даётся формулой (2.33). ■

Утверждение 2.9.

Если при данном μ резольвента Фредгольма существует, то она единственна.

Доказательство.

Пусть при фиксированном $\mu \neq 0$ имеются две резольвенты $\Gamma(x, y; \mu)$ и $\tilde{\Gamma}(x, y; \mu)$. Поскольку при данном μ уравнение (2.1) имеет единственное решение, любая непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет тождеству $f(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy \equiv f(x) + \mu \int_a^b \tilde{\Gamma}(x, y; \mu) f(y) dy$ по переменной x на $[a, b]$. Введём обозначение $\omega(x, y) = \Gamma(x, y; \mu) - \tilde{\Gamma}(x, y; \mu)$; тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ выполнено тождество $\int_a^b \omega(x, y) f(y) dy \equiv 0$. Фиксируем $x \in [a, b]$ и положим

$f(y) = \overline{\omega(x, y)}$. Тогда $\int_a^b |\omega(x, y)|^2 dy = 0$. Следовательно, при выбранном x выполнено тождество $\omega(x, y) \equiv 0$ по переменной y на $[a, b]$. В силу произвольности x это тождество справедливо в квадрате S . ■

Пример 2.8.

Для уравнения $\varphi(x) - \mu \int_0^1 xy \varphi(y) dy = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, в примере 2.4 построены итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y) = \frac{xy}{3^{n-1}}$. Для ядра $\mathcal{K}(x, y) = xy$ этого уравнения $M = 1$, поэтому определяющий резольвенту ряд (2.31) заведомо сходится при $|\mu| < 1$. Но этот ряд есть сумма членов геометрической прогрессии: $\Gamma(x, y; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \frac{xy}{3^{n-1}} = \frac{3xy}{3 - \mu}$; он сходится в более широком круге $|\mu| < 3$. Согласно (2.33) решение уравнения имеет вид $\varphi(x) = f(x) + \mu \int_0^1 \frac{3xy}{3 - \mu} f(y) dy$ (проверьте, подставив в уравнение!). Отсюда видно, что решение интегрального уравнения существует и единственно при всех комплексных $\mu \neq 3$, а не только при $|\mu| < 1$, и не только при $|\mu| < 3$. Точка $\mu = 3$ является полюсом аналитической по переменной μ функции $\Gamma(x, y; \mu)$ (для всех $(x, y) \in S$, кроме вершины квадрата $x = y = 0$).

Для данного ядра $\mathcal{K}$ найдите величину P и примените теорему 2.6; при каких μ эта теорема гарантирует сходимость ряда (2.32)? ■

Пример 2.9.

Для уравнения $\varphi(x) - \mu \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$,

в примере 2.3 найдены итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y) = e^{x-y}$. Для ядра $\mathcal{K}(x, y) = e^{x-y}$ этого уравнения $M = e$, поэтому определяющий резольвенту ряд (2.31) заведомо сходится при $|\mu| < e^{-1}$. Но этот ряд есть сумма членов геометрической прогрессии: $\Gamma(x, y; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \cdot e^{x-y} = \frac{e^{x-y}}{1-\mu}$; он сходится в более широком круге $|\mu| < 1$. Согласно (2.33) решение уравнения имеет вид $\varphi(x) = f(x) + \mu \int_0^1 \frac{e^{x-y}}{1-\mu} f(y) dy$ (проверьте, подставив в уравнение!).

Отсюда видно, что решение интегрального уравнения существует и единственно при всех комплексных $\mu \neq 1$, а не только при $|\mu| < e^{-1}$, и не только при $|\mu| < 1$. Точка $\mu = 1$ является полюсом аналитической по переменной μ функции $\Gamma(x, y; \mu)$ для всех $(x, y) \in S$.

Для данного ядра $\mathcal{K}$ найдите величину P и примените теорему 2.6; при каких μ эта теорема гарантирует сходимость ряда (2.32)? ■

Замечание 2.15. Если при фиксированном μ резольвента является непрерывной функцией от x, y , и функция f непрерывна, то формула (2.33) показывает, что решение φ уравнения (2.1) будет непрерывной функцией. ■

Замечание 2.16.

Существование резольвенты при данном μ означает, что при этом μ справедливо операторное равенство $(E - \mu A)^{-1} = E + \mu \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — интегральный оператор с ядром $\Gamma(x, y; \mu)$ (см. замечание 2.13 и формулу (2.33)). ■

Замечание 2.17.

Формула (2.33) для решения уравнения (2.1) получена в предположении непрерывности ядра $\mathcal{K}$. Но построить резольвенту Фредгольма, доказать её единственность и обосновать формулу (2.33) можно и в более общем случае. Пусть ядро $\mathcal{K}$ не обязательно непрерывно, но фредгольмово в квадрате S , т.е. $P < \infty$. Пусть в уравнении (2.1) свободный член $f \in L_2[a, b]$. Тогда ищем не обязательно непрерывное решение $\varphi \in L_2[a, b]$. Можно доказать, что при выполнении условия (2.28) функциональный ряд (2.31) сходится в среднем квадратическом в квадрате S . Поэтому в (2.32) можно интегрировать почленно, и тогда снова приходим к формуле (2.33). Но теперь при фиксированном μ резольвента Фредгольма не обязательно будет непрерывной в квадрате S ; можно только утверждать, что она является функцией класса $L_2(S)$, т.е. удовлетворяет условию $\int_a^b \int_a^b |\Gamma(x, y; \mu)|^2 dx dy < \infty$. Из

этого условия и из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что для любой функции $f \in L_2[a, b]$ интеграл в формуле (2.33) имеет смысл, и что формула (2.33) определяет решение $\varphi \in L_2[a, b]$ уравнения (2.1). При выполнении условия (2.28) это решение в $L_2[a, b]$ единственно.

Тем самым при указанном условии на μ справедливо операторное равенство $(E - \mu A)^{-1} = E + \mu \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — интегральный оператор с ядром $\Gamma(x, y; \mu)$, действующий в $L_2[a, b]$. ■

Понятие резольвенты Фредгольма и формула (2.33) приводят к следующим вопросам:

- при каких $\mu \in \mathbb{C}$ существует резольвента?
- как её построить для всех таких μ ?
- каковы свойства резольвенты?

В этих вопросах фактически речь идёт о задаче аналитического продолжения по переменной μ функции $\Gamma(x, y; \mu)$ и об изучении особых точек этой аналитической функции.

Задача 2.3.

Как связаны резольвенты ядер $\mathcal{K}(x, y)$ и $\mathcal{K}^*(x, y)$?

Решение. Пусть $\Gamma_{\mathcal{K}}(x, y; \mu)$ и $\Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \mu)$ — резольвенты ядер $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$. Пользуясь формулой (2.31) и следствием 2.1, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \bar{\mu}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}^{n-1} (\mathcal{K}^*(x, y))_n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}^{n-1} (\mathcal{K}_n(x, y))^* = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}^{n-1} \overline{\mathcal{K}_n(y, x)} = \overline{\Gamma_{\mathcal{K}}(y, x; \mu)}. \end{aligned}$$

Эта связь резольвент $\Gamma_{\mathcal{K}^*}$ и $\Gamma_{\mathcal{K}}$ обоснована пока лишь для значений μ , лежащих в круге (2.24) (или в круге (2.28)); но она сохраняется для всех μ , при которых существует $\Gamma_{\mathcal{K}}$. ■

2.4. Теоремы Фредгольма в конечномерном случае.

Через H в данном разделе будем обозначать конечномерное комплексное евклидово пространство (линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ со скалярным произведением (φ, ψ) называют еще унитарным) размерности m . Пусть T — действующий в H линейный оператор: $T \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$, T^* — оператор, сопряжённый к T . Введем в H множество всех нулей оператора T (его называют ядром оператора) $\text{Ker} T = \{\varphi \in H | T\varphi = 0\}$ и множество всех его значений (образ оператора) $\text{Ran} T = \{f \in H | \exists \varphi, f = T\varphi\}$; введём аналогичные по смыслу множества $\text{Ker} T^*$ и $\text{Ran} T^*$. Каждое из этих четырёх множеств является подпространством в H (докажите!). Напомним известную из курса линейной алгебры связь между этими подпространствами.

Утверждение 2.10.

$\text{Ker} T = (\text{Ran} T^*)^{\perp}$, $\text{Ker} T^* = (\text{Ran} T)^{\perp}$ (символ $^{\perp}$ означает ортогональное дополнение к подпространству в H).

Доказательство.

Пусть $\varphi \in \text{Ker} T$, т.е. $T\varphi = 0$. Тогда для любого вектора $\psi \in H$ имеем $(\varphi, T^*\psi) = (T\varphi, \psi) = (0, \psi) = 0$. В силу произвольности φ и ψ это

означает, что $RanT^* \perp KerT$. Вспоминая, что $(T^*)^* = T$, точно так же получаем $RanT \perp KerT^*$. Воспользуемся известными соотношениями:

$$\begin{aligned}\dim RanT + \dim KerT &= m, \\ \dim RanT^* + \dim KerT^* &= m.\end{aligned}$$

Число $\dim RanT$ называют рангом оператора T (обозначение: $\text{rang}T$); $\dim RanT^* = \text{rang}T^*$. Ранги операторов T и T^* совпадают, поэтому

$$\begin{aligned}\dim RanT^* + \dim KerT &= m, \\ \dim RanT + \dim KerT^* &= m. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Из утверждения 2.10 немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема Фредгольма.

Для разрешимости уравнения $T\varphi = f$ необходимо и достаточно, чтобы его правая часть f была ортогональна ко всем решениям ψ сопряжённого однородного уравнения $T^*\psi = 0$. ■

Альтернатива Фредгольма.

Либо неоднородное уравнение $T\varphi = f$ имеет, и притом единственное, решение при любой правой части f ,

либо сопряжённое однородное уравнение $T^*\psi = 0$ имеет ненулевое решение.

Доказательство. Пусть $\text{rang}T = \text{rang}T^* = s$. Возможны два случая: либо $s = m$, либо $s < m$. В первом случае $RanT = H$, поэтому уравнение $T\varphi = f$ имеет решение при любой правой части f ; оператор T невырожденный, т.е. $KerT = 0$. В этом же случае $\dim KerT^* = 0$. Поэтому $KerT^*$ не имеет ненулевых векторов, т.е. сопряжённое однородное уравнение $T^*\psi = 0$ не имеет ненулевых решений.

В случае $s < m$ множество $RanT$ не совпадает с H , поэтому неоднородное уравнение $T\varphi = f$ может иметь решение не при любой правой части f . В этом же случае $KerT^*$ состоит не только из нулевого элемента, т.е. уравнение $T^*\psi = 0$ имеет ненулевые решения. ■

Если в пространстве H выбрать ортонормированный базис, то уравнения $T\varphi = f$ и $T^*\psi = 0$ можно записать в виде систем линейных алгебраических уравнений с сопряжёнными друг другу квадратными матрицами коэффициентов. (Напомним, что если в ортонормированном базисе оператор T имеет матрицу (t_{ij}) , $i, j = 1, \dots, m$, то оператор T^* в этом базисе имеет матрицу $(t_{ij}^*) = (\overline{t_{ji}})$, $i, j = 1, \dots, m$; причем $\det(t_{ij}^*) = \overline{\det(t_{ij})}$.) С точки зрения изучения таких систем уравнений предыдущие две теоремы означают следующее.

Теорема Фредгольма.

Для разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов необходимо

и достаточно, чтобы вектор её правой части был ортогонален ко всем решениям сопряжённой однородной системы. ■

Альтернатива Фредгольма.

Либо неоднородная система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов имеет, и притом единственное, решение при любой правой части (случай $\det(t_{ij}) \neq 0$),

либо сопряжённая однородная система имеет ненулевое решение (случай $\det(t_{ij}^*) = 0$). ■

Пусть теперь дан оператор $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$. В качестве T выберем оператор $T = E - \mu A$, где E — тождественный оператор в H , μ — параметр, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда $T^* = E - \bar{\mu}A^*$. Рассмотрим 4 уравнения:

$$T\varphi = (E - \mu A)\varphi = f, \quad f \in H, \quad (2.34)$$

$$T\overset{\circ}{\varphi} = (E - \mu A)\overset{\circ}{\varphi} = 0, \quad (2.35)$$

$$T^*\psi = (E - \bar{\mu}A^*)\psi = g, \quad g \in H, \quad (2.36)$$

$$T^*\overset{\circ}{\psi} = (E - \bar{\mu}A^*)\overset{\circ}{\psi} = 0. \quad (2.37)$$

Уравнения (2.35) и (2.37) — это задачи о характеристических значениях и собственных векторах операторов A и A^* (собственные значения $\lambda = 1/\mu$).

Запишем утверждение 2.10 для выбранного оператора T :

$Ker(E - \mu A) = (Ran(E - \bar{\mu}A^*))^\perp$, $Ker(E - \bar{\mu}A^*) = (Ran(E - \mu A))^\perp$. Кроме того, имеем $\dim Ran(E - \mu A) = \text{rang}(E - \mu A) = \text{rang}(E - \bar{\mu}A^*) = \dim Ran(E - \bar{\mu}A^*)$. Если μ — характеристическое значение оператора A , то число $r = \dim Ker(E - \mu A)$ является наибольшим числом линейно независимых собственных векторов $\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_r$ оператора A , которые отвечают этому μ (r — геометрическая кратность или ранг характеристического значения μ). Аналогично определяется геометрическая кратность характеристического значения оператора A^* .

Задача 2.4.

Как связаны друг с другом характеристические значения операторов A и A^* ? ■

Теперь очевидны аналогии теорем 2.1 — 2.4 для действующего в H оператора A .

Теорема 2.1 в конечномерном случае.

Оператор A имеет лишь конечное число характеристических чисел μ_n . ■

Теорема 2.2 в конечномерном случае.

Если μ — правильное значение оператора A , то каждое из сопряжённых уравнений (2.34) и (2.36) имеет одно и только одно решение, каковы бы ни были их правые части f и g .

Доказательство.

В теореме утверждается, что операторы $E - \mu A$ и $E - \bar{\mu}A^*$ невырожденные. Это очевидно, т.к. если μ — правильное значение опера-

тора A , то $\dim \text{Ker}(E - \mu A) = 0$, и тогда $\text{Ran}(E - \bar{\mu}A^*) = H$. Но $\dim \text{Ran}(E - \bar{\mu}A^*) = \dim \text{Ran}(E - \mu A)$, поэтому и $\text{Ran}(E - \mu A) = H$. ■

Теорема 2.3 в конечномерном случае.

Если μ — характеристическое значение оператора A , то сопряжённые однородные уравнения (2.35) и (2.37) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Доказательство.

Геометрическая кратность характеристического числа μ равна $\dim \text{Ker}(E - \mu A) = m - \dim \text{Ran}(E - \bar{\mu}A^*) = m - \dim \text{Ran}(E - \mu A) = \dim \text{Ker}(E - \bar{\mu}A^*)$. ■

Теорема 2.3 в конечномерном случае (другая формулировка).

Если μ является характеристическим числом оператора A , то $\bar{\mu}$ является характеристическим числом сопряжённого оператора A^* . Эти характеристические числа имеют одинаковые конечные геометрические кратности. ■

Теорема 2.4 в конечномерном случае.

Чтобы неоднородное уравнение (2.34) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член f был ортогонален к любому решению сопряжённого однородного уравнения (2.37).

Доказательство: $\text{Ran}(E - \mu A) \perp \text{Ker}(E - \bar{\mu}A^*)$. ■

Будем решать уравнение (2.34) при правильном значении $\mu \neq 0$ оператора A (случай $\mu = 0$ тривиален). Тогда существует обратный оператор $(E - \mu A)^{-1}$, который можно записать в виде $(E - \mu A)^{-1} = E + \mu \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — некоторый линейный оператор: $\mathcal{J} \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$ (ср. с замечаниями 2.16, 2.17). Это значит, что решение φ уравнения (2.34) можно представить в виде $\varphi = (E - \mu A)^{-1}f = (E + \mu \mathcal{J})f = f + \mu \mathcal{J}f$, где

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\mu}[(E - \mu A)^{-1} - E]. \quad (2.38)$$

Фиксируем произвольный базис в пространстве H . Матрицы операторов A , $\mathcal{J}$, E в этом базисе будем обозначать теми же буквами A , $\mathcal{J}$, E (матрица E единичная). Введем обозначение:

$$D(\mu) = \det(E - \mu A) = \begin{vmatrix} 1 - \mu a_{11} & -\mu a_{12} & \dots & -\mu a_{1m} \\ -\mu a_{21} & 1 - \mu a_{22} & \dots & -\mu a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mu a_{m1} & -\mu a_{m2} & \dots & 1 - \mu a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Тогда обратную матрицу $(E - \mu A)^{-1}$ можно записать в виде $(E - \mu A)^{-1} = \frac{1}{D(\mu)}(\widehat{E - \mu A})$, где $(\widehat{E - \mu A})$ — матрица, присоединённая к матрице $(E - \mu A)$. (Напомним, что для построения присоединённой матрицы надо все элементы данной матрицы заменить на

их алгебраические дополнения и транспонировать полученную матрицу.) Следуя (2.38), запишем теперь матрицу оператора $\mathcal{J}$ в выбранном базисе:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\mu D(\mu)} Q, \quad (2.39)$$

где матрица $Q = (\widehat{E - \mu A}) - D(\mu)E$; обозначим через $\Gamma_{ij}(\mu)$ элементы матрицы $\mathcal{J}$. Получили покомпонентную запись единственного решения φ уравнения (2.34) в выбранном базисе:

$$\varphi_i = f_i + \mu \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}(\mu) f_j, \quad i = 1, \dots, m; \quad (2.40)$$

это аналог формулы (2.33).

Что можно сказать о $\Gamma_{ij}(\mu)$ как о функции переменной μ , если i и j фиксировать? Очевидно, что $D(\mu)$ является многочленом от μ степени не выше m с равным 1 свободным членом (нетрудно найти все коэффициенты многочлена $D(\mu)$; см. [2], гл. 1, п. 7). Алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы $(E - \mu A)$ тоже являются многочленами от μ . Поэтому все элементы матрицы Q в (2.39) суть многочлены от μ ; убедимся, что свободные члены всех этих многочленов равны нулю.

Утверждение 2.11.

Все элементы матрицы Q представляют собой многочлены от μ , свободные члены которых равны нулю. Поэтому, разделив каждый элемент матрицы Q на μ , снова получим многочлен от μ меньшей степени.

Доказательство.

Рассмотрим элемент матрицы $E - \mu A$ вне её главной диагонали. Его алгебраическое дополнение обязательно содержит μ в качестве множителя, т.к. при построении этого алгебраического дополнения мы вычёркиваем два диагональных элемента, содержащих слагаемые 1, а дополнительный минор элемента данной матрицы — это определитель порядка $m - 1$. Член $-D(\mu)E$ в формуле (2.39) такое алгебраическое дополнение не изменяет, т.к. вне главной диагонали все его элементы равны нулю.

Теперь рассмотрим элемент матрицы $E - \mu A$ на её главной диагонали. Его алгебраическое дополнение обязательно содержит свободный член 1, причём со знаком „плюс“, т.к. номер строки и номер столбца выбранного элемента совпадают. Этот равный 1 свободный член сократится в формуле (2.39) из-за наличия в ней слагаемого $-D(\mu)E$, т.к. свободный член многочлена $D(\mu)$ равен 1. ■

Таким образом, в правой части формулы (2.39) можно сократить μ в числителе и в знаменателе. Обозначим элементы матрицы $\frac{1}{\mu}Q$

после указанного сокращения на μ через $D_{ij}(\mu)$; все они являются многочленами от μ степеней не выше $m-1$. Тогда все $\Gamma_{ij}(\mu) = \frac{D_{ij}(\mu)}{D(\mu)}$ представляют собой отношения многочленов от μ с одним и тем же независимым от i и j знаменателем. Поэтому формулу (2.40) можно переписать в виде

$$\varphi_i = f_i + \mu \sum_{j=1}^m \frac{D_{ij}(\mu)}{D(\mu)} f_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.41)$$

Замечание 2.18.

$D(\mu) = 0$ в том, и только в том случае, когда μ является характеристическим числом оператора A , т.к. в этом, и только в этом случае оператор $E - \mu A$ вырожден.

Если характеристическое число μ имеет геометрическую кратность $r = m - \text{rang}(E - \mu A)$ и ему соответствуют линейно независимые собственные векторы $\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_r$ оператора A , то уравнение (2.34) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений вида $\varphi + c_1 \overset{\circ}{\varphi}_1 + \dots + c_r \overset{\circ}{\varphi}_r$, где $c_1, \dots, c_r$ — произвольные постоянные, а вектор φ — какое угодно частное решение неоднородного уравнения (2.34). ■

Задача 2.5.

Зависят ли коэффициенты многочлена $D(\mu)$ от выбора базиса в пространстве H ? Зависят ли коэффициенты многочленов $D_{ij}(\mu)$ от выбора базиса в H ? ■

Задача 2.6.

Все типы действующих в пространстве H ненулевых линейных операторов A можно классифицировать при помощи жордановых* форм их матриц. Пусть $m = 2$, тогда с точностью до перестановок жордановых клеток возможны следующие типы жордановых форм матриц.

1. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0.$
2. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2.$
3. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0.$
4. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0.$
5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

В каждом из указанных случаев запишите уравнение (2.34) в виде системы линейных алгебраических уравнений в жордановом базисе. Найдите многочлен $D(\mu)$, все характеристические значения параметра μ и их геометрические кратности. Найдите все многочлены $D_{ij}(\mu)$, для правильных значений μ запишите решение уравнения (2.34) в жордановом базисе по формуле (2.41). Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от жорданова базиса к новому базису. Найдите все $D_{ij}(\mu)$ в новом базисе и запишите решение уравнения (2.34) в этом базисе для правильных μ .

* Жордан Мари Энмон Камиль (1838–1922) — французский математик.

Пусть $m = 3$. Проведите классификацию всех типов ненулевых линейных операторов A , действующих в H , при помощи жордановых форм их матриц с точностью до перестановок жордановых клеток. В каждом случае для правильных значений параметра μ запишите решение уравнения (2.34) в жордановом базисе по формуле (2.41). ■

Задача 2.7.

Очевидно, что свободный член многочлена $D(\mu)$ равен $D(0) = 1$. Запишем $D(\mu)$ в виде

$$D(\mu) = (-\mu)^m \kappa_0 + (-\mu)^{m-1} \kappa_1 + \dots + (-\mu) \kappa_{m-1} + 1.$$

Докажите, что $\kappa_0 = \det A$, $\kappa_{m-1} = \operatorname{tr} A$ — след матрицы A . ■

Вернёмся к интегральному уравнению (2.1). Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ интегрального оператора непрерывно в замкнутом квадрате S , свободный член $f(x)$ непрерывен, и ищем непрерывное решение $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. В разделе 2.3 описано построение приближённых решений уравнения (2.1) методом последовательных приближений при достаточно малых $|\mu|$. Другой подход к нахождению приближённых решений состоит в замене интеграла в (2.1) интегральной суммой. Построим разбиение отрезка $a \leq y \leq b$ отрезками $[y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \dots, m$, $y_0 = a$, $y_m = b$. Выберем на каждом отрезке разбиения произвольную точку ξ_j и заменим уравнение (2.1) на приближённое уравнение

$$\varphi(x) - \mu \sum_{j=1}^m \mathcal{K}(x, \xi_j) \varphi(\xi_j) (y_j - y_{j-1}) = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.42)$$

Можно многими способами строить разбиения отрезка $a \leq y \leq b$ и выбирать точки ξ_j . Например, можно для всех j выбрать $y_j - y_{j-1} = \frac{b-a}{m}$ и $\xi_j = y_j$. Для нахождения приближённых значений искомой функции φ в точках ξ_j положим в (2.42) последовательно $x = \xi_1, \dots, \xi_m$. Введём вектор-столбец неизвестных $\varphi_i = \varphi(\xi_i)$, $i = 1, \dots, m$, и вектор-столбец $f_i = f(\xi_i)$, $i = 1, \dots, m$ (оба вектора принадлежат пространству $\mathbb{C}^m$ и заданы в естественном базисе $(1, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, \dots, 0, 1)^T$). Получили систему линейных алгебраических уравнений с параметром μ :

$$\varphi_i - \mu \sum_{j=1}^m a_{ij} \varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.43)$$

где $a_{ij} = \mathcal{K}(\xi_i, \xi_j) (y_j - y_{j-1})$; коротко: $(E - \mu A)\varphi = f$.

Возможны две точки зрения на построение приближённого решения уравнения (2.1) и на оценку его погрешности. Первая из них состоит в том, что приближённое решение считается сеточной функцией, заданной на сетке $\{\xi_i\}_{i=1}^m$; в качестве такой сеточной функции можно взять решение $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ системы (2.43). Тогда и точное решение уравнения (2.1) надо рассматривать только на этой сетке, а для оценки

точности приближённого решения следует ввести какую-либо норму в конечномерном пространстве сеточных функций, т.е. в $\mathbb{C}^m$. Вторая точка зрения состоит в том, что решение уравнения (2.1) — это функция непрерывно меняющегося на отрезке $[a, b]$ аргумента x , и приближённое решение должно быть определённой на $[a, b]$ функцией x . В этом случае для оценки точности приближённого решения надо ввести какую-либо норму в бесконечномерном пространстве функций, определённых на $[a, b]$. В качестве приближённого решения можно взять некоторую функцию, зависящую от x и от конечного числа подлежащих определению параметров. Например, приближённое решение можно получить из (2.42):

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \sum_{j=1}^m \mathcal{K}(x, \xi_j)(y_j - y_{j-1})\varphi_j, \quad (2.44)$$

где значения параметров φ_i находятся из (2.43). Как видно из формулы (2.41), сумма в (2.44) является отношением некоторых многочленов от μ (подставьте (2.41) в (2.44)).

Будем измельчать разбиения отрезка $a \leq y \leq b$, устремляя m к бесконечности и всё точнее приближая интеграл. Можно ожидать, что в пределе при $\max_{1 \leq j \leq m} (y_j - y_{j-1}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, когда интегральная сумма совпадёт с интегралом, приближённое решение (2.44) совпадёт с точным. Что при этом произойдёт с многочленами $D_{ij}(\mu)$ и $D(\mu)$ в (2.41), с многочленами от μ в (2.44)? Их степени, вообще говоря, будут стремиться к $+\infty$, т.е. предел суммы в (2.44) будет не отношением многочленов от μ , а отношением степенных рядов по целым неотрицательным степеням параметра μ . Пуанкаре высказал гипотезу, что решение интегрального уравнения (2.1) является мероморфной функцией от μ .

Определение 2.6.

Мероморфной функцией называют однозначную аналитическую функцию комплексной переменной, которая определена всюду в $\mathbb{C}$, кроме не более счётного числа конечных изолированных особых точек, которые все являются её полюсами. ■

Гипотезу Пуанкаре доказал Фредгольм; он рассмотрел интегральное уравнение (2.1) как предельный случай конечной системы алгебраических уравнений (2.43). С помощью формального (без строго обоснования) перехода к пределу Фредгольм получил формулу (2.33), дающую решение уравнения (2.1) для всех $\mu \in \mathbb{C}$ за исключением, быть может, конечного или счётного множества значений параметра μ . Тем самым для фиксированной точки $(x, y) \in S$ резольвента ядра $\mathcal{K}(x, y)$ является отношением двух целых функций от μ : $\Gamma(x, y; \mu) = \frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)}$, т.е. мероморфной аналитической функцией.

Фредгольм доказал теоремы об условиях разрешимости уравнения (2.1). Он нашёл выражения функций $D(x, y; \mu)$ и $D(\mu)$ в виде сходящихся всюду в $\mathbb{C}$ степенных рядов по степеням параметра μ — рядов Фредгольма. Строгое обоснование описанного выше предельного перехода было сделано Гильбертом*.

2.5. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.

Имеется класс интегральных уравнений, которые эквивалентны системам линейных алгебраических уравнений. Пусть на отрезке $a \leq x \leq b$ даны m линейно независимых непрерывных функций $\alpha_i = \alpha_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, а на отрезке $a \leq y \leq b$ даны m линейно независимых непрерывных функций $\beta_i = \beta_i(y)$, $i = 1, \dots, m$ (будем считать для определённости, что $m > 1$; случай $m = 1$ потребует лишь дополнительного простого замечания). Ядро интегрального оператора

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y) \quad (2.45)$$

непрерывно в замкнутом квадрате S .

Определение 2.7.

Ядро вида (2.45), где система функций $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ линейно независима и система функций $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ линейно независима, называют вырожденным. ■

Замечание 2.19.

Не обязательно требовать, чтобы линейно независимые функции $\alpha_i(x)$ и линейно независимые функции $\beta_i(y)$ были непрерывными. Можно считать, что ядро $\mathcal{K}(x, y)$ фредгольмово и имеет представление (2.45). Такое ядро тоже называют вырожденным. В данном разделе будем для определённости полагать, что все $\alpha_i(x)$ и все $\beta_i(y)$ непрерывны, т.е. вырожденное ядро непрерывно. ■

Рассмотрим интегральное уравнение (2.1) с непрерывным вырожденным ядром и с непрерывным свободным членом $f(x)$:

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y) \right) \varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b; \quad (2.46)$$

будем искать его решение в классе непрерывных функций. Уравнение (2.46) имеет вид

$$\varphi(x) - \mu \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (2.47)$$

*Гильберт Давид (1862–1943) — немецкий математик.

Введём обозначения $p_i = \int_a^b \beta_i(y) \varphi(y) dy$, тогда получим

$$\varphi(x) = \mu \sum_{i=1}^m p_i \alpha_i(x) + f(x); \quad (2.48)$$

решение уравнения (2.46) сводится к нахождению чисел $p_1, \dots, p_m$.

Замечание 2.20.

Числа p_i имеют смысл следующих скалярных произведений:

$$p_i = \int_a^b \varphi(y) \beta_i(y) dy = (\varphi, \overline{\beta_i}). \blacksquare$$

Подставим выражение решения (2.48) в уравнение (2.47) и воспользуемся линейной независимостью функций $\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)$: из тождества

$$\mu \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \left[p_i - \int_a^b \beta_i(y) \left(f(y) + \mu \sum_{j=1}^m p_j \alpha_j(y) \right) dy \right] \equiv 0, \quad a \leq x \leq b,$$

следуют равенства

$$p_i = \int_a^b \beta_i(y) \left(f(y) + \mu \sum_{j=1}^m p_j \alpha_j(y) \right) dy = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Введём обозначения $a_{ij} = \int_a^b \beta_i(y) \alpha_j(y) dy$ и $f_i = \int_a^b \beta_i(y) f(y) dy$. Тогда для нахождения неизвестных $p_1, \dots, p_m$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$p_i - \mu \sum_{j=1}^m a_{ij} p_j = f_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.49)$$

Эта система имеет вид $(E - \mu A) \vec{p} = \vec{f}$, где векторы-столбцы $\vec{p}, \vec{f} \in \mathbb{C}^m$. Система (2.49) эквивалентна уравнению (2.46). Действительно, если непрерывная функция φ является решением уравнения (2.46), то числа $p_1, \dots, p_m$ удовлетворяют системе (2.49); наоборот, если числа $p_1, \dots, p_m$ удовлетворяют системе (2.49), то построенная по формуле (2.48) функция $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению (2.46) (проверьте, подставив $\varphi(x)$ в уравнение!).

Замечание 2.21.

Систему уравнений (2.49) можно получить по-другому. Для каждого $j = 1, \dots, m$ умножим равенство (2.48) на $\beta_j(x)$ и проинтегрируем на отрезке $[a, b]$. Поменяв ролями i и j , получим (2.49). $\blacksquare$

Определитель $D(\mu)$ основной матрицы системы (2.49) введён в разделе 2.4 (см. формулы (2.39) — (2.41)). Он является многочленом от μ степени не выше m ; $D(\mu) \not\equiv 0$, поскольку $D(0) = 1$. Поэтому имеется не более m различных значений параметра μ , при которых $D(\mu) = 0$. При этих значениях μ система (2.49) (а вместе с ней и интегральное уравнение (2.46)) либо неразрешима, либо имеет бесконечно много решений — в зависимости от $\vec{f}$. Условию $D(\mu) = 0$ удовлетворяют все характеристические значения μ , и только они. Если же $D(\mu) \neq 0$, то μ — правильное значение; при таком μ система (2.49) (а вместе с ней и уравнение (2.46)) имеет единственное решение.

Утверждение 2.12.

Если $\mathcal{K}(x, y)$ — непрерывное вырожденное ядро, и $f(x)$ — непрерывная функция, то для интегральных уравнений (2.1) — (2.4) выполнены теоремы Фредгольма 2.1 — 2.4.

Доказательство следует из эквивалентности уравнения (2.46) и системы уравнений (2.49), и из теорем раздела 2.4. ■

Задача 2.8.

Найдите ядро $\mathcal{K}^*(x, y)$, сопряжённое к вырожденному ядру $\mathcal{K}(x, y)$. Постройте систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную интегральному уравнению (2.3), в случае вырожденного ядра.

Решение.

$\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)} = \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i(y)} \overline{\beta_i(x)}$. Уравнение (2.3) имеет вид

$$\psi(x) - \bar{\mu} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \overline{\beta_i(x)} \overline{\alpha_i(y)} \right) \psi(y) dy = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Перепишем это уравнение:

$$\psi(x) - \bar{\mu} \sum_{i=1}^m \overline{\beta_i(x)} \int_a^b \overline{\alpha_i(y)} \psi(y) dy = g(x),$$

и введём обозначения $q_i = \int_a^b \overline{\alpha_i(y)} \psi(y) dy$; тогда получим

$$\psi(x) = \bar{\mu} \sum_{i=1}^m q_i \overline{\beta_i(x)} + g(x). \quad (2.50)$$

В полной аналогии с выводом системы уравнений (2.49) обозначаем

$a_{ij}^* = \int_a^b \overline{\alpha_i(y)} \overline{\beta_j(y)} dy$ и $g_i = \int_a^b \overline{\alpha_i(y)} g(y) dy$, и приходим к искомой си-

стеме линейных алгебраических уравнений:

$$q_i - \bar{\mu} \sum_{j=1}^m a_{ij}^* q_j = g_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.51)$$

Очевидно, что $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$, где a_{ij} — коэффициенты в (2.49). ■

Задача 2.9.

Пусть μ — характеристическое значение вырожденного ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Найдите отвечающие данному μ собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ этого ядра. Найдите геометрическую кратность μ . Найдите отвечающие $\bar{\mu}$ собственные функции $\psi(x)$ ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$. Найдите геометрическую кратность $\bar{\mu}$.

Ответ. $\overset{\circ}{\varphi}_l(x) = \mu \sum_{i=1}^m p_i^{(l)} \alpha_i(x)$, $l = 1, \dots, r$, где $\overrightarrow{p^{(l)}} = (p_1^{(l)}, \dots, p_m^{(l)})^T$

удовлетворяет системе уравнений (2.49) с правой частью $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$ (см. формулу (2.48)). Геометрическая кратность r характеристического значения μ : $r = \dim \text{Ker}(E - \mu A) = m - \text{rang}(E - \mu A)$, где A — матрица коэффициентов a_{ij} в (2.49).

$\psi_l(x) = \bar{\mu} \sum_{i=1}^m q_i^{(l)} \overline{\beta_i(x)}$, $l = 1, \dots, r^*$, где $\overrightarrow{q^{(l)}} = (q_1^{(l)}, \dots, q_m^{(l)})^T$ удо-

влетворяет системе уравнений (2.51) с правой частью $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ (см. формулу (2.50)). Геометрическая кратность r^* характеристического значения $\bar{\mu}$: $r^* = m - \text{rang}(E - \bar{\mu} A^*) = m - \text{rang}(E - \mu A) = r$, где A^* — матрица коэффициентов a_{ij}^* в (2.51).

Как видно, системы собственных функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_l(x)\}$ и $\{\psi_l(x)\}$, вообще говоря, не совпадают. ■

Вернёмся к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений (2.49). Пусть μ — правильное значение непрерывного вырожденного ядра $\mathcal{K}(x, y)$, т.е. $D(\mu) \neq 0$. Запишем решение системы (2.49) по правилу Крамера*. Для этого при каждом $i = 1, \dots, m$ введём определитель $\Delta_i(\mu)$, матрица которого получается из матрицы $(E - \mu A)$ заменой её i -го столбца на вектор-столбец $\overrightarrow{f}$. Пусть $\delta_{ki}(\mu)$ — алгебраическое дополнение элемента f_k в матрице определителя $\Delta_i(\mu)$; очевидно, все $\delta_{ki}(\mu)$ не зависят от $\overrightarrow{f}$. Очевидно также, что все $\delta_{ki}(\mu)$ являются многочленами от μ степеней не выше $m - 1$. Записывая решение системы (2.49) по правилу Крамера, раскроем каждый определитель $\Delta_i(\mu)$ по i -му столбцу:

$$p_i = \frac{\Delta_i(\mu)}{D(\mu)} = \frac{\sum_{k=1}^m f_k \delta_{ki}(\mu)}{D(\mu)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

*Крамер Габриель (1704–1752) — швейцарский математик.

Теперь решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (2.46) согласно формуле (2.48) принимает вид

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\mu}{D(\mu)} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m f_k \delta_{ki}(\mu) \right) \alpha_i(x).$$

Вспоминая обозначение $f_k = \int_a^b \beta_k(y) f(y) dy$, получаем

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)} f(y) dy,$$

где $D(x, y; \mu) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ki}(\mu) \alpha_i(x) \beta_k(y)$. Этим доказана формула (2.33) в случае непрерывного вырожденного ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Резольвента Фредгольма в этом случае имеет вид $\Gamma(x, y; \mu) = \frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)}$, причём $D(x, y; \mu)$ является многочленом от μ степени не выше $m-1$; коэффициенты этого многочлена зависят от x и y . Знаменатель $D(\mu)$ дроби является многочленом от μ степени не выше m ; его коэффициенты от x и y не зависят.

Если x и y фиксировать, то резольвента $\Gamma(x, y; \mu)$ будет определена при всех $\mu \in \mathbb{C}$, кроме конечного множества характеристических значений ядра $\mathcal{K}(x, y)$, при которых $D(\mu) = 0$. В точках μ , являющихся характеристическими, резольвента может (хотя и не обязана) обращаться в бесконечность, т.е. может иметь в этих точках полюсы.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.7.

Резольвента Фредгольма непрерывного вырожденного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ является рациональной функцией комплексной переменной μ . При каждом правильном значении μ она непрерывна как функция x и y . ■

Рациональная функция, т.е. отношение многочленов, является мероморфной аналитической функцией; её особыми точками могут быть только полюсы. В разделе 2.3 резольвента была определена при достаточно малых $|\mu|$, теперь же в случае вырожденного непрерывного ядра получили её мероморфное продолжение на всю комплексную μ -плоскость.

Замечание 2.22.

При $m = 1$ вырожденное ядро $\mathcal{K}(x, y) = \alpha_1(x) \beta_1(y)$. Для такого ядра все проведённые в данном разделе рассуждения сохраняются за исключением случая, когда след ядра $\text{tr} \mathcal{K} = \int_a^b \alpha_1(x) \beta_1(x) dx = 0$. В этом

случае надо изменить ход решения уравнения (2.46), начиная с формулы (2.49). Поскольку теперь $a_{11} = 0$, имеем $p_1 = f_1 = \int_a^b \beta_1(y) f(y) dy$ и $D(\mu) \equiv 1$. Тогда по формуле (2.48) получаем решение интегрального уравнения :

$$\varphi(x) = f(x) + \mu p_1 \alpha_1(x) = f(x) + \mu \int_a^b \alpha_1(x) \beta_1(y) f(y) dy.$$

Таким образом, в случае $\text{tr} \mathcal{K} = 0$ резольвента не зависит от μ : $\Gamma(x, y; \mu) = \mathcal{K}(x, y)$, все значения μ правильные. ■

Замечание 2.23.

Все рассуждения данного раздела справедливы и для вырожденных фредгольмовых ядер, не обязательно непрерывных. В этом случае надо полагать, что все $\alpha_i \in L_2[a, b]$ и все $\beta_i \in L_2[a, b]$. Тогда резольвента не обязательно будет функцией, непрерывной в квадрате S по переменным x и y , но при фиксированном правильном значении μ она будет

удовлетворять условию $\int_a^b \int_a^b |\Gamma(x, y; \mu)|^2 dx dy < \infty$. ■

Замечание 2.24.

Один из способов построения приближённого решения уравнения (2.1) с произвольным фредгольмовым ядром состоит в замене данного ядра близким к нему вырожденным ядром и решении системы линейных алгебраических уравнений (2.49). ■

Задача 2.10.

Рассмотрим 4 случая задания непрерывного вырожденного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ (матрица $(a_{ij})_{j=1,2}^{i=1,2}$ имеет тот же смысл, что в (2.49)).

1. $m = 1, \int_a^b \alpha_1(x) \beta_1(x) dx \neq 0$.
2. $m = 2, \det(a_{ij}) = 0, \text{tr}(a_{ij}) = 0$.
3. $m = 2, \det(a_{ij}) = 0, \text{tr}(a_{ij}) \neq 0$.
4. $m = 2, \det(a_{ij}) \neq 0$.

В каждом из указанных 4 случаев решите следующую задачу.

Найдите все правильные и все характеристические значения ядра $\mathcal{K}$. При всех правильных значениях параметра μ найдите резольвенту Фредгольма и постройте непрерывное решение интегрального уравнения (2.46) с данным ядром и непрерывным свободным членом f . Для каждого характеристического значения μ найдите все отвечающие ему линейно независимые собственные функции. Какому условию должна удовлетворять функция f , чтобы уравнение (2.46) было разрешимо в случае характеристического μ ? Найдите общий вид решения в случае характеристического μ . ■

Задача 2.11.

Решая систему уравнений (2.51) по правилу Крамера, докажите, что решение уравнения (2.3) с вырожденным ядром $\mathcal{K}^*(x, y)$ имеет

вид

$$\psi(x) = g(x) + \bar{\mu} \int_a^b \Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \bar{\mu}) g(y) dy,$$

где $\Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \bar{\mu}) = \frac{\overline{D(y, x; \mu)}}{\overline{D(\mu)}}$. Тем самым для вырожденных ядер $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$ справедлива формула $\Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \bar{\mu}) = \overline{\Gamma_{\mathcal{K}}(y, x; \mu)}$ при правильных значениях параметра. ■

2.6. Доказательство теорем Фредгольма в общем случае.

Пусть в уравнении (2.1) ядро $\mathcal{K}(x, y)$ не является вырожденным, а величина $|\mu|$ не мала. Докажем теоремы Фредгольма 2.1 — 2.4 в этом общем случае. Идея доказательства основана на приближении заданного ядра вырожденными ядрами с любой точностью.

Будем полагать, что в (2.1) ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S , а свободные члены в уравнениях (2.1) и (2.3) непрерывны на $[a, b]$; ищем непрерывные решения уравнений (2.1) — (2.4).

Утверждение 2.13.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S . Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие непрерывные в замкнутом квадрате S ядра $\mathbf{N}(x, y)$ и $\mathbf{L}(x, y)$, что

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) + \mathbf{L}(x, y) \text{ в } S;$$

$\mathbf{N}$ — вырожденное ядро: $\mathbf{N}(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y)$, где функции α_i непрерывны и линейно независимы на $a \leq x \leq b$, а функции β_i непрерывны и линейно независимы на $a \leq y \leq b$;

$$M_{\mathbf{L}} = \max_S |\mathbf{L}(x, y)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Для данного ядра $\mathcal{K}$ построить указанные ядра $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ можно многими способами. Воспользуемся, например, теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами на компактном множестве. В рассматриваемом случае эта теорема утверждает следующее. Для любой действительной функции $\mathcal{K}(x, y)$ независимых действительных переменных x и y , непрерывной на замкнутом квадрате S , существует последовательность алгебраических многочленов от x и y , равномерно сходящаяся к $\mathcal{K}(x, y)$ на S (см. [23], гл. 2, §5). Иными словами, непрерывную на S функцию $\mathcal{K}$ можно с любой точностью приблизить по норме пространства $C(S)$ многочленами от x и y . Если $\mathcal{K}$ принимает комплексные значения, то речь идёт о приближениях многочленами отдельно её действительной и мнимой частей. Таким образом, в качестве $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(y)$ можно взять многочлены от x и от

y ; степень многочлена $\mathbf{N}(x, y)$, вообще говоря, зависит от ε . Полагая $\mathbf{L}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \mathbf{N}(x, y)$, получаем требуемые ядра $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$. ■

Замечание 2.25.

Конкретный вид вырожденного ядра $\mathbf{N}$, приближающего ядро $\mathcal{K}$, не имеет значения. Например, если ядро $\mathcal{K}$ может быть периодически по x и по y продолжено с S на всю плоскость Oxy с сохранением непрерывности, то в теореме Вейерштрасса алгебраические многочлены можно заменить на тригонометрические многочлены от x и y . Далее не будем конкретизировать вид ядра $\mathbf{N}$; оно может и не быть многочленом.

Отметим, однако, что выбор конкретного вырожденного ядра $\mathbf{N}$, приближающего $\mathcal{K}$, сразу приводит к построению приближённого метода решения уравнения (2.1). ■

Будем считать, что в замкнутом квадрате S непрерывное ядро $\mathcal{K}$ представлено в виде $\mathcal{K}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) + \mathbf{L}(x, y)$, где $\mathbf{N}$ — вырожденное ядро: $\mathbf{N}(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(y)$ (все функции α_i и β_i непрерывны).

Через $\Gamma_{\mathbf{L}}$ и $\Gamma_{\mathbf{L}^*}$ обозначим резольвенты ядер $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^*$ в предположении, что эти резольвенты существуют; как и выше, $M_{\mathbf{L}} = \max_S |\mathbf{L}(x, y)| = M_{\mathbf{L}^*} = \max_S |\mathbf{L}^*(x, y)|$. Введём модифицированные функции $\alpha_i(x; \mu)$ и $\beta_i(y; \mu)$:

$$\alpha_i(x; \mu) = \alpha_i(x) + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) \alpha_i(y) dy, \quad (2.52)$$

$$\beta_i(y; \mu) = \beta_i(y) + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) \beta_i(x) dx. \quad (2.53)$$

Наряду с ядром $\mathbf{N}$ построим зависящие от μ вырожденные ядра

$$\mathbf{N}^{(\alpha)}(x, y; \mu) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x; \mu) \beta_i(y), \quad (2.54)$$

$$\mathbf{N}^{(\beta)}(x, y; \mu) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y; \mu). \quad (2.55)$$

Модифицируем также свободные члены f и g уравнений (2.1) и (2.3):

$$f(x; \mu) = f(x) + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) f(y) dy, \quad (2.56)$$

$$g(x; \bar{\mu}) = g(x) + \bar{\mu} \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}^*}(x, y; \bar{\mu}) g(y) dy. \quad (2.57)$$

Лемма 2.1.

Пусть значение параметра μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{M_{\mathbf{L}}(b-a)}. \quad (2.58)$$

Тогда уравнение (2.1) эквивалентно уравнению

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \mathbf{N}^{(\alpha)}(x, y; \mu) \varphi(y) dy = f(x; \mu). \quad (2.59)$$

Доказательство.

Уравнение (2.1) запишем в виде

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \mathbf{L}(x, y) \varphi(y) dy = f(x) + \mu \int_a^b \mathbf{N}(x, y) \varphi(y) dy. \quad (2.60)$$

Правую часть равенства (2.60) обозначим через $F(x; \mu)$ и временно будем рассматривать её как известную функцию. Условие (2.58) позволяет применить к уравнению (2.60) с ядром $\mathbf{L}$ метод последовательных приближений; при выполнении (2.58) ядро $\mathbf{L}$ имеет резольвенту $\Gamma_{\mathbf{L}}$ (см. (2.31)), и для решения φ уравнения (2.60) справедлива формула (2.33):

$$\varphi(x) = F(x; \mu) + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) F(y; \mu) dy. \quad (2.61)$$

Первое слагаемое в (2.61) запишем в виде

$$f(x) + \mu \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(t) \right) \varphi(t) dt. \text{ Второе слагаемое является выражением}$$

$$\mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) f(y) dy + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) \left[\mu \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i(y) \beta_i(t) \right) \varphi(t) dt \right] dy;$$

изменим в нём порядок интегрирования по t и по y . Тогда (2.61) озна-

чает $\varphi(x) = f(x; \mu) + \mu \int_a^b \mathbf{N}^{(\alpha)}(x, t; \mu) \varphi(t) dt$ (проверьте!). ■

Лемма 2.2.

Если μ удовлетворяет неравенству (2.58), то уравнение (2.1) эквивалентно уравнению

$$\Phi(x) - \mu \int_a^b \mathbf{N}^{(\beta)}(x, y; \mu) \Phi(y) dy = f(x) \quad (2.62)$$

относительно функции Φ и формуле

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) \Phi(y) dy. \quad (2.63)$$

Доказательство.

Во втором способе сведения уравнения (2.1) к уравнению с вырожденным ядром обозначим через $\Phi(x)$ левую часть равенства (2.60):

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \mu \int_a^b \mathbf{L}(x, y) \varphi(y) dy; \quad (2.64)$$

временно будем рассматривать функцию Φ как известную. При выполнении условия (2.58) решение φ уравнения (2.64) даётся формулой (2.33), которая имеет вид (2.63). Подставим выражение φ по формуле (2.63) в правую часть уравнения (2.60):

$$\Phi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \mathbf{N}(x, y) \Phi(y) dy + \mu \int_a^b \mathbf{N}(x, y) \left[\mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(y, t; \mu) \Phi(t) dt \right] dy.$$

В третьем слагаемом изменим порядок интегрирования по t и по y ; во втором слагаемом переменную интегрирования y заменим на t . Подставим выражение ядра $\mathbf{N}$. Тогда

$$\Phi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \mathbf{N}^{(\beta)}(x, t; \mu) \Phi(t) dt \text{ (проверьте!).} \blacksquare$$

Лемма 2.3.

Если μ удовлетворяет неравенству (2.58), то уравнение (2.3) эквивалентно уравнению

$$\psi(x) - \bar{\mu} \int_a^b \left(\mathbf{N}^{(\beta)}(x, y; \mu) \right)^* \psi(y) dy = g(x; \bar{\mu}). \quad (2.65)$$

Доказательство.

Поскольку $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathbf{N}(y, x)} + \overline{\mathbf{L}(y, x)}$, уравнение (2.3) можно за-

писать в виде

$$\psi(x) - \bar{\mu} \int_a^b \overline{\mathbf{L}(y, x)} \psi(y) dy = g(x) + \bar{\mu} \int_a^b \overline{\mathbf{N}(y, x)} \psi(y) dy. \quad (2.66)$$

Правую часть равенства (2.66) обозначим через $G(x; \mu)$ и временно будем рассматривать её как известную функцию. Условие (2.58) позволяет применить к уравнению (2.66) с ядром $\mathbf{L}^*(x, y) = \overline{\mathbf{L}(y, x)}$ метод последовательных приближений (напомним, что $M_{\mathbf{L}^*} = M_{\mathbf{L}}$); при выполнении (2.58) ядро $\mathbf{L}^*$ имеет резольвенту $\Gamma_{\mathbf{L}^*}$. Согласно задаче 2.3 справедливо равенство

$$\Gamma_{\mathbf{L}^*}(x, y; \bar{\mu}) = \overline{\Gamma_{\mathbf{L}}(y, x; \mu)}. \quad (2.67)$$

Формула (2.33) даёт решение ψ уравнения (2.66):

$$\psi(x) = G(x; \mu) + \bar{\mu} \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}^*}(x, y; \bar{\mu}) G(y; \mu) dy.$$

Отсюда, подставляя выражения функций G и $\mathbf{N}$, меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, и используя равенство (2.67), получаем (2.65) (проверьте!). ■

Лемма 2.4.

Если μ удовлетворяет неравенству (2.58), то уравнение (2.3) эквивалентно уравнению

$$\Psi(x) - \bar{\mu} \int_a^b \left(\mathbf{N}^{(\alpha)}(x, y; \mu) \right)^* \Psi(y) dy = g(x) \quad (2.68)$$

относительно функции Ψ и формуле

$$\psi(x) = \Psi(x) + \bar{\mu} \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}^*}(x, y; \bar{\mu}) \Psi(y) dy. \quad (2.69)$$

Доказательство.

Во втором способе сведения уравнения (2.3) к уравнению с вырожденным ядром обозначим через $\Psi(x)$ левую часть равенства (2.66):

$$\Psi(x) = \psi(x) - \bar{\mu} \int_a^b \mathbf{L}^*(x, y) \psi(y) dy; \quad (2.70)$$

временно будем рассматривать функцию Ψ как известную. При выполнении условия (2.58) решение ψ уравнения (2.70) даётся формулой (2.33), которая имеет вид (2.69). Подставляя выражение ψ по формуле (2.69) в правую часть уравнения (2.66), меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, подставляя выражение функции $\mathbf{N}$, и используя равенство (2.67), получаем (2.68) (проверьте!). ■

Утверждение 2.14.

Для непрерывного ядра $\mathcal{K}$ справедливы теоремы 2.1–2.4.

Доказательство.

Выберем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ и в замкнутом квадрате S построим равномерное приближение ядра $\mathcal{K}$ вырожденным ядром $\mathbf{N}$ с точностью до ε : $\mathcal{K}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) + \mathbf{L}(x, y)$, где $M_{\mathbf{L}} < \varepsilon$.

Докажем теорему 2.1. При выполнении условия (2.58) уравнение (2.1) можно свести к уравнению с вырожденным ядром либо по лемме 2.1, либо по лемме 2.2. Оба эти способа приводят уравнение (2.1) к эквивалентной ему системе линейных алгебраических уравнений вида (2.49). Применяя лемму 2.1, получим систему уравнений

$$p_i - \mu \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(\alpha)}(\mu) p_j = f_i(\mu), \quad i = 1, \dots, m; \quad (2.71)$$

здесь в определении коэффициентов $a_{ij}^{(\alpha)}(\mu)$ использованы модифицированные функции $\alpha_j(x; \mu)$ вида (2.52). Применяя лемму 2.2, получим систему уравнений

$$p_i^{(\beta)} - \mu \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(\beta)}(\mu) p_j^{(\beta)} = f_i^{(\beta)}(\mu), \quad i = 1, \dots, m; \quad (2.72)$$

здесь в определении искомых величин $p_i^{(\beta)}$, коэффициентов $a_{ij}^{(\beta)}(\mu)$ и свободных членов $f_i^{(\beta)}$ использованы модифицированные функции $\beta_i(y; \mu)$ вида (2.53).

В круге (2.58) комплексной μ -плоскости резольвента $\Gamma_{\mathbf{L}}$ является голоморфной функцией переменной μ , так как в этом круге она определена сходящимся степенным рядом вида (2.31). Поэтому $\mathbf{N}^{(\alpha)}(x, y; \mu)$ и $f(x; \mu)$ в уравнении (2.59) тоже голоморфные по μ функции в этом круге. Следовательно, все $a_{ij}^{(\alpha)}(\mu)$ и $f_i(\mu)$ в системе (2.71) суть голоморфные функции от μ в круге (2.58).

Точно так же в уравнении (2.62) ядро $\mathbf{N}^{(\beta)}(x, y; \mu)$ является голоморфной по μ функцией в круге (2.58). Следовательно, все $a_{ij}^{(\beta)}(\mu)$ и $f_i^{(\beta)}(\mu)$ в системе (2.72) суть голоморфные функции от μ в этом круге.

Теперь очевидно, что в обоих способах функции $D(x, y; \mu)$ и $D(\mu)$ (см. раздел 2.5) будут голоморфными по μ в круге (2.58); причём $D(\mu) \not\equiv 0$, поскольку $D(0) = 1$. Напомним, что $M_{\mathbf{L}} < \varepsilon$. В замкнутом круге $|\mu| \leq \frac{1}{\varepsilon(b-a)}$ функция $D(\mu)$ может иметь лишь конечное число нулей: в противном случае по теореме единственности определения голоморфной функции было бы $D(\mu) \equiv 0$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ в круге $|\mu| \leq \frac{1}{\varepsilon(b-a)}$ интегральный оператор с непрерывным ядром $\mathcal{K}$ может иметь лишь конечное число характеристических значений. Этим доказана теорема 2.1 (двумя способами). (Функции $D(x, y; \mu)$ и $D(\mu)$ зависят здесь от выбора ядра $\mathbf{L}$ и определены в круге (2.58); более правильны обозначения этих функций $D(x, y; \mu|\mathbf{L})$ и $D(\mu|\mathbf{L})$.)

Докажем теоремы 2.2 и 2.3 (свободные члены f и g считаем непрерывными). Для любого $\varepsilon > 0$ при каждом значении μ , фиксированном в круге $|\mu| \leq \frac{1}{\varepsilon(b-a)}$, уравнения (2.1) — (2.4) сведены к аналогичным по смыслу уравнениям с зависящими от μ вырожденными ядрами. При этом для каждого значения μ сопряжённым друг другу исходным ядрам соответствуют сопряжённые друг другу вырожденные ядра. Уравнения (2.1) — (2.4) и построенные уравнения с вырожденными ядрами попарно эквивалентны в том смысле, что между множествами решений двух идентичных по своему характеру уравнений устанавливается взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейную независимость (для установления такого соответствия надо учесть формулу (2.63) или (2.69)). Первый способ задания указанного соответствия основан на модификации функций $\alpha_i(x)$ (леммы 2.1 и 2.4). Второй способ основан на модификации функций $\beta_i(y)$ (леммы 2.2 и 2.3).

Легко видеть, что однородным уравнениям (2.2) и (2.4) соответствуют однородные уравнения с вырожденными ядрами. Действительно: если $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, то и $f(x; \mu) \equiv 0$ (см. (2.56)). Обратно: пусть $f(x; \mu) \equiv 0$ на $[a, b]$; тогда по формуле (2.33) для ядра $\mathbf{L}$ решение ω уравнения $\omega(x) - \mu \int_a^b \mathbf{L}(x, y)\omega(y)dy = f(x)$ имеет вид $\omega(x) = f(x; \mu) \equiv 0$. Отсюда $f(x) \equiv 0$. Совершенно аналогично доказывается, что $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ в том, и только в том случае, если $g(x, \bar{\mu}) \equiv 0$.

Теперь теоремы 2.2 и 2.3 следуют из аналогичных теорем для вырожденных ядер (это доказано двумя способами).

Докажем теорему 2.4. Сохраним прежние обозначения $\overset{\circ}{\varphi}$, $\overset{\circ}{\Phi}$, $\overset{\circ}{\psi}$, $\overset{\circ}{\Psi}$ для решений однородных уравнений. Пусть μ — характеристическое значение ядра $\mathcal{K}$. Докажем, что функции f и ψ ортогональны в том,

и только в том случае, когда ортогональны аналоги этих функций в уравнениях с вырожденными ядрами. В способе, основанном на леммах 2.1 и 2.4, надо доказать, что $\int_a^b \overline{f(x)} \psi(x) dx = 0$ тогда, и только

тогда, когда $\int_a^b \overline{f(x; \mu)} \Psi(x) dx = 0$. Для этого надо подставить выраже-

ние функции ψ по формуле (2.69) и выражение $f(x; \mu)$ по формуле (2.56), воспользоваться равенством (2.67) и изменить порядок интегрирования в одном из повторных интегралов (проведите доказательство!). А в способе, основанном на леммах 2.2 и 2.3, ничего на надо доказывать.

Теперь теорема 2.4 следует из аналогичной теоремы для вырожденных ядер. ■

Следствие 2.5.

Для интегрального оператора с непрерывным ядром любое комплексное число μ является либо правильным, либо его характеристическим значением. Других случаев быть не может. ■

Замечание 2.27.

Для нефредгольмовых линейных интегральных операторов возможны случаи значений параметра μ , отличных от правильных и характеристических. ■

Замечание 2.28.

Все результаты данного раздела остаются верными и для фредгольмова ядра $\mathcal{K}$, не обязательно непрерывного на S . В этом случае надо полагать, что свободные члены f и g в уравнениях (2.1) и (2.3) принадлежат $L_2[a, b]$, и что решения уравнений (2.1) — (2.4) ищем в классе функций $L_2[a, b]$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно считать, что фредгольмово ядро $\mathcal{K}$ приближено вырожденным фредгольмовым ядром $\mathbf{N}$ с точностью до ε по норме пространства $L_2(S)$:

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) + \mathbf{L}(x, y), \text{ где } P_{\mathbf{L}} = \left(\int_a^b \int_a^b |\mathbf{L}(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \text{ Такую}$$

аппроксимацию можно получить, например, по теореме, аналогичной теореме Вейерштрасса, о приближении функции $\mathcal{K}(x, y)$ многочленами в пространстве $L_2(S)$.

Дальше будем действовать как в доказательствах лемм 2.1 — 2.4 и утверждения 2.14. При этом методом последовательных приближений можно пользоваться в круге $|\mu| < \frac{1}{P_{\mathbf{L}}}$ комплексной μ -плоскости. То-

гда в этом круге уравнения (2.1) — (2.4) будут сведены к уравнениям с зависящими от μ вырожденными ядрами класса $L_2(S)$. Рассматривая эти уравнения в круге $|\mu| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ (напомним, что $P_{\mathbf{L}} < \varepsilon$), получим

доказательства теорем 2.1 — 2.4 для фредгольмова ядра $\mathcal{K}$. ■

2.7. Свойства резольвенты Фредгольма.

В разделе 2.3 построена резольвента Фредгольма для достаточно малых $|\mu|$, а в разделе 2.5 — для всех правильных значений μ вырожденного ядра. Результаты раздела 2.6 позволяют теперь построить резольвенту при всех правильных μ в общем случае — для непрерывного ядра и, более общо, для фредгольмова ядра. Это даст обоснование формулы (2.33) для всех правильных значений μ .

2.7.1. Существование резольвенты Фредгольма при всех правильных значениях параметра.

Рассмотрим подробно случай, когда в уравнении (2.1) ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S , свободный член f и решение φ непрерывны на $[a, b]$.

Лемма 2.5.

В системах уравнений (2.71) и (2.72) коэффициенты $a_{ij}^{(\alpha)}(\mu) = a_{ij}^{(\beta)}(\mu)$ при всех i и j .

Доказательство.

Вспоминая определения (2.52) и (2.53) модифицированных функций $\alpha_i(x; \mu)$ и $\beta_i(y; \mu)$, запишем коэффициенты систем (2.71) и (2.72)

в обозначениях разделов 2.5 и 2.6: $a_{ij}^{(\alpha)}(\mu) = \int_a^b \beta_i(y) \alpha_j(y; \mu) dy =$
 $= a_{ij} + \int_a^b \beta_i(y) \left(\mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(y, t; \mu) \alpha_j(t) dt \right) dy$, где $a_{ij} = \int_a^b \beta_i(y) \alpha_j(y) dy$. Точно так же $a_{ij}^{(\beta)}(\mu) = a_{ij} + \int_a^b \left(\mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(t, y; \mu) \beta_i(t) dt \right) \alpha_j(y) dy$. Изменяя порядок интегрирования в одном из повторных интегралов, получаем утверждение леммы. ■

Теорема 2.8.

Резольвента Фредгольма $\Gamma_{\mathcal{K}}(x, y; \mu)$ непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ существует при каждом его правильном значении μ и представима отношением целых функций переменной μ , знаменатель которого не зависит от x и y : $\Gamma_{\mathcal{K}}(x, y; \mu) = \frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)}$.

Доказательство.

Выберем произвольное сколь угодно большое число $R > 0$ и рассмотрим открытый круг $|\mu| < R$ на комплексной μ -плоскости. Непрерывное ядро $\mathcal{K}$ разложим в сумму $\mathcal{K}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) + \mathbf{L}(x, y)$, где $\mathbf{N}$ — вырожденное непрерывное ядро такого же вида, как в утверждении 2.13, а ядро $\mathbf{L}$ удовлетворяет условию $M_{\mathbf{L}} = \max_S |\mathbf{L}(x, y)| < \frac{1}{R(b-a)}$.

В круге $|\mu| < \frac{1}{M_{\mathbf{L}}(b-a)}$, а следовательно и в меньшем круге $|\mu| < R$, формулой (2.31) определена резольвента $\Gamma_{\mathbf{L}}$ ядра $\mathbf{L}$. Пользуясь леммой 2.1 или леммой 2.2, сведём уравнение (2.1) к уравнению с зависящим от μ вырожденным ядром (2.59) или к уравнению (2.62) и формуле (2.63). Для тех значений μ , при которых существует $\Gamma_{\mathbf{L}}$, выразим решение φ уравнения (2.1) при помощи $\Gamma_{\mathbf{L}}$; этим будет доказано существование резольвенты $\Gamma_{\mathcal{K}}$ ядра $\mathcal{K}$ и установлена связь между $\Gamma_{\mathcal{K}}$ и $\Gamma_{\mathbf{L}}$. (Как и в разделе 2.6, доказательство, проводимое фактически двумя способами, можно считать избыточным.)

По лемме 2.5 основные матрицы систем уравнений (2.71) и (2.72) совпадают при каждом μ в круге (2.58); пусть $D(\mu|\mathbf{L})$ — определитель этих одинаковых матриц. В отличие от функции $D(\mu)$, рассмотренной в разделах 2.4 и 2.5, здесь в обозначении подчёркнуто, что эта функция зависит от выбора ядра $\mathbf{L}$ и определена в круге (2.58). В круге (2.58) резольвента $\Gamma_{\mathbf{L}}$ является голоморфной функцией переменной μ , поэтому функция $D(\mu|\mathbf{L})$ тоже голоморфна в этом круге, но теперь уже не обязательно является многочленом от μ . Следовательно, в указанном круге $D(\mu|\mathbf{L})$ задаётся сходящимся степенным рядом по целым неотрицательным степеням переменной μ .

Поскольку основные матрицы систем уравнений (2.71) и (2.72) совпадают, алгебраические дополнения $\delta_{ki}(\mu)$ их элементов одинаковы в обоих способах сведения уравнения (2.1) к системе линейных алгебраических уравнений; эти алгебраические дополнения определяются выбором ядра $\mathbf{L}$: $\delta_{ki}(\mu) = \delta_{ki}(\mu|\mathbf{L})$. Следовательно, в случае уравнения (2.59) будем иметь (см. раздел 2.5)

$$D^{(\alpha)}(x, y; \mu|\mathbf{L}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ki}(\mu) \alpha_i(x; \mu) \beta_k(y),$$

а в случае уравнения (2.62) будем иметь

$$D^{(\beta)}(x, y; \mu|\mathbf{L}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ki}(\mu) \alpha_i(x) \beta_k(y; \mu).$$

Решение уравнения (2.59) даётся формулой

$$\varphi(x) = f(x; \mu) + \mu \int_a^b \frac{D^{(\alpha)}(x, y; \mu|\mathbf{L})}{D(\mu|\mathbf{L})} f(y; \mu) dy.$$

Подставим в эту формулу выражение (2.56) модифицированного свободного члена $f(x; \mu)$. Тогда можно доказать, что для значений пара-

метра μ в круге (2.58)

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) f(y) dy + \mu \int_a^b \frac{D(x, y; \mu | \mathbf{L})}{D(\mu | \mathbf{L})} f(y) dy, \quad (2.73)$$

$$D(x, y; \mu | \mathbf{L}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ki}(\mu) \alpha_i(x; \mu) \beta_k(y; \mu). \quad (2.74)$$

Решение уравнения (2.62) даётся формулой

$$\Phi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \frac{D^{(\beta)}(x, y; \mu | \mathbf{L})}{D(\mu | \mathbf{L})} f(y) dy; \quad (2.75)$$

и тогда по формуле (2.63) получаем

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \frac{D^{(\beta)}(x, y; \mu | \mathbf{L})}{D(\mu | \mathbf{L})} f(y) dy + \mu \int_a^b \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) \Phi(y) dy.$$

Подставляя выражение (2.75) функции $\Phi(y)$, можно доказать, что снова придём к (2.73), (2.74).

Формула (2.73) означает, что в круге (2.58) для правильных значений μ ядра $\mathcal{K}$ существует его резольвента

$$\Gamma_{\mathcal{K}}(x, y; \mu) = \Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu) + \frac{D(x, y; \mu | \mathbf{L})}{D(\mu | \mathbf{L})}. \quad (2.76)$$

В круге (2.58) резольвента $\Gamma_{\mathbf{L}}$ голоморфна по переменной μ . Поэтому определённая формулой (2.74) функция $D(x, y; \mu | \mathbf{L})$ тоже голоморфна по μ в этом круге, но в отличие от раздела 2.5 она уже не обязательно является многочленом от μ . В указанном круге $D(x, y; \mu | \mathbf{L})$ задаётся сходящимся степенным рядом по целым неотрицательным степеням переменной μ ; его коэффициенты зависят от x и y . Формула (2.76) показывает, что в круге (2.58) резольвента $\Gamma_{\mathcal{K}}$ представляется отношением двух степенных рядов, причём знаменатель этого отношения не зависит от x и y .

Итак, если фиксировано правильное значение μ ядра $\mathcal{K}$, то можно выбрать число $R > |\mu|$ и равномерно на S приблизить ядро $\mathcal{K}$ вырожденным ядром $\mathbf{N}$ с точностью $\frac{1}{R(b-a)}$. Чем большим окажется $|\mu|$, тем более точно надо приближать ядро $\mathcal{K}$ вырожденным ядром $\mathbf{N}$, и тем в большем круге (2.58) будет возможным применение метода последовательных приближений для ядра $\mathbf{L}$.

По утверждению 2.9 резольвента Фредгольма единственна, поэтому $\Gamma_{\mathcal{K}}(x, y; \mu)$ не зависит от выбора числа $R > |\mu|$ и от разложения ядра $\mathcal{K}$ в сумму $\mathcal{K} = \mathbf{N} + \mathbf{L}$. Для всех правильных значений μ ядра $\mathcal{K}$ его

резольвента имеет вид $\Gamma_{\mathcal{K}}(x, y; \mu) = \frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)}$, где $D(x, y; \mu)$ и $D(\mu)$ — целые функции переменной μ , причём $D(\mu)$ не зависит от x и y . ■

Задача 2.12.

Докажите формулы (2.73), (2.74), исходя из леммы 2.1; исходя из леммы 2.2. ■

Следствие 2.6.

Если число μ является правильным значением непрерывного ядра $\mathcal{K}$, то $\bar{\mu}$ — правильное значение сопряжённого к нему ядра $\mathcal{K}^*$. Поэтому для $\bar{\mu}$ существует резольвента ядра $\mathcal{K}^*$, причём справедлива формула $\Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \bar{\mu}) = \Gamma_{\mathcal{K}}(y, x; \mu)$.

Доказательство.

Связь резольвент ядер $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$ была установлена в задаче 2.3 для достаточно малых $|\mu|$ и в задаче 2.11 для вырожденных ядер. В общем случае её обоснование требует рассмотреть доказательство теоремы, аналогичной теореме 2.8, для ядра $\mathcal{K}^* = \mathbf{N}^* + \mathbf{L}^*$. Это доказательство проводится с использованием прежних обозначений (2.52) — (2.57) в круге (2.58). Оно может быть основано либо на лемме 2.3, либо на лемме 2.4.

В доказательстве с использованием леммы 2.3 по сравнению с применением леммы 2.1 в случае ядра $\mathcal{K}$ надо модификацию функций $\alpha_i(x)$ заменить на модификацию функций $\beta_i(y)$ и вместо системы уравнений (2.71) построить систему (см. (2.51))

$$q_i - \bar{\mu} \sum_{j=1}^m \overline{a_{ji}^{(\beta)}(\mu)} q_j = g_i(\bar{\mu}), i = 1, \dots, m.$$

В доказательстве с использованием леммы 2.4 по сравнению с применением леммы 2.2 в случае ядра $\mathcal{K}$ надо модификацию функций $\beta_i(y)$ заменить на модификацию функций $\alpha_i(x)$ и вместо системы уравнений (2.72) построить систему (см. (2.51))

$$q_i^{(\alpha)} - \bar{\mu} \sum_{j=1}^m \overline{a_{ji}^{(\alpha)}(\mu)} q_j^{(\alpha)} = g_i^{(\alpha)}(\bar{\mu}), i = 1, \dots, m.$$

Далее доказательство проводится как в теореме 2.8. Надо только учесть, что в задаче 2.11 было показано, что если для вырожденного ядра его резольвента имеет вид $\frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)}$, то для сопряжённого к нему ядра резольвента имеет вид $\frac{D(y, x; \mu)}{D(\mu)}$. (Проведите подробное доказательство!) ■

2.7.2. Свойства резольвенты непрерывного ядра.

Единственность резольвенты Фредгольма доказана в утверждении 2.9. Резольвенту непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ далее обозначаем через $\Gamma(x, y; \mu)$.

Свойство 2.1.

Для непрерывного в замкнутом квадрате S ядра $\mathcal{K}(x, y)$ при любом его правильном значении μ резольвента $\Gamma(x, y; \mu)$ является непрерывной функцией точки (x, y) в S .

Доказательство следует из формулы (2.76): в подразделе 2.3.2 показано, что функция $\Gamma_{\mathbf{L}}$ непрерывно зависит от (x, y) , а функции $\alpha_i(x; \mu)$ и $\beta_k(y; \mu)$ непрерывны по x и по y . ■

Свойство 2.2.

При фиксированных x и y резольвента ядра $\mathcal{K}$ является мероморфной аналитической функцией переменной μ . Каждое характеристическое число ядра $\mathcal{K}$ является полюсом его резольвенты при некоторых x и y .

Доказательство.

Мероморфность резольвенты ядра $\mathcal{K}$ была фактически доказана в теореме 2.8. Она следует из того, что в формуле (2.76) функции $\Gamma_{\mathbf{L}}(x, y; \mu)$, $D(x, y; \mu|\mathbf{L})$ и $D(\mu|\mathbf{L})$ голоморфны по μ в круге (2.58), и по теореме единственности определения голоморфной функции в любой замкнутой ограниченной подобласти этого круга $D(\mu|\mathbf{L})$ может иметь не более конечного числа нулей. Этими нулями могут быть лишь характеристические значения ядра $\mathcal{K}$.

Докажем, что характеристическое число μ ядра $\mathcal{K}$ не может быть устранимой особой точкой его резольвенты для всех $(x, y) \in S$. Предположим противное. Характеристическому числу μ ядра $\mathcal{K}^*$ соответствует его собственная функция $\overset{\circ}{\psi}(x)$ — ненулевое решение уравнения (2.4). По теореме 2.4 уравнение

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = \overset{\circ}{\psi}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (*)$$

не имеет решений. Выберем правильную точку ν , близкую к характеристическому значению μ . Уравнение

$$\varphi(x) - \nu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = \overset{\circ}{\psi}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.77)$$

имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \overset{\circ}{\psi}(x) + \nu \int_a^b \Gamma(x, y; \nu) \overset{\circ}{\psi}(y) dy.$$

Подставив это решение в (2.77), получим тождество

$$\overset{\circ}{\psi}(x) + \nu \int_a^b \Gamma(x, y; \nu) \overset{\circ}{\psi}(y) dy - \nu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \left[\overset{\circ}{\psi}(y) + \nu \int_a^b \Gamma(y, t; \nu) \overset{\circ}{\psi}(t) dt \right] dy \equiv \overset{\circ}{\psi}(x),$$

$a \leq x \leq b$. По предположению при всех $(x, y) \in S$ точка μ является устранимой особой точкой функции Γ . Поэтому в тождестве можно перейти к пределу при $\nu \rightarrow \mu$; и тогда при $\nu = \mu$ это тождество означает, что функция $\overset{\circ}{\psi}(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) \overset{\circ}{\psi}(y) dy$ является решением уравнения (*). Противоречие! ■

Замечание 2.29.

Свойство 2.2 означает, что для характеристического числа μ найдется такая точка $(x, y) \in S$, что μ будет полюсом функции $\Gamma(x, y; \mu)$. Это не означает, что μ будет полюсом при всех $(x, y) \in S$. ■

Замечание 2.30.

Пусть характеристическое значение μ является для резольвенты полюсом порядка q . Тогда в проколотой окрестности точки μ (при $\nu \neq \mu$) резольвента представима рядом Лорана*:

$$\Gamma(x, y; \nu) = \frac{c_{-q}(x, y)}{(\nu - \mu)^q} + \dots + \frac{c_{-1}(x, y)}{\nu - \mu} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x, y)(\nu - \mu)^n, \quad (2.78)$$

где коэффициент $c_{-q}(x, y) \neq 0$ в S . Можно доказать, что в случае непрерывного ядра $\mathcal{K}$ все коэффициенты $c_n(x, y)$, $n = -q, \dots, -1, 0, 1, \dots$, суть непрерывные в замкнутом квадрате S функции (для этого надо разложить $D(x, y; \mu)$ и $D(\mu)$, определяющие в теореме 2.8 резольвенту ядра $\mathcal{K}$, в степенные ряды по степеням переменной μ и изучить их коэффициенты; см. [2], п. 7, 8). ■

Свойство 2.3.

При достаточно малых $|\mu|$ резольвента определена рядом Тейлора** (2.31). Областью сходимости этого ряда является круг $|\mu| < |\mu_1|$, где μ_1 — характеристическое число с наименьшей абсолютной величиной.

Доказательство.

В разделе 2.3 разложение (2.31) было доказано в круге (2.24). Но радиус круга сходимости ряда Тейлора равен расстоянию от центра разложения $\mu = 0$ до ближайшей особой точки μ_1 аналитической функции Γ . ■

*Лоран Пьер Альфонс (1813–1854) — французский математик.

**Тейлор Брук (1685–1731) — английский математик.

Замечание 2.31.

Изученный в разделе 2.3 метод последовательных приближений сходится в круге $|\mu| < |\mu_1|$. ■

Свойство 2.4.

При любом правильном значении μ резольвента непрерывного ядра $\mathcal{K}$ удовлетворяет в квадрате S следующим уравнениям:

$$\Gamma(x, y; \mu) = \mathcal{K}(x, y) + \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \Gamma(t, y; \mu) dt, \quad (2.79)$$

$$\Gamma(x, y; \mu) = \mathcal{K}(x, y) + \mu \int_a^b \mathcal{K}(t, y) \Gamma(x, t; \mu) dt. \quad (2.80)$$

Доказательство.

При правильном значении $\mu \neq 0$ подставим в уравнение (2.1) с непрерывным свободным членом f решение этого уравнения, записанное по формуле (2.33). Тогда получим тождество на отрезке $a \leq x \leq b$:

$$f(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \left(\mu \int_a^b \Gamma(y, t; \mu) f(t) dt \right) dy \equiv f(x).$$

После сокращения $f(x)$ разделим тождество на μ и изменим порядок интегрирования в повторном интеграле. Тождество примет вид

$$\int_a^b \left[\Gamma(x, y; \mu) - \mathcal{K}(x, y) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \Gamma(t, y; \mu) dt \right] f(y) dy \equiv 0, \quad a \leq x \leq b;$$

оно справедливо для любой непрерывной функции f . В силу непрерывности выражения в квадратных скобках отсюда по основной лемме вариационного исчисления следует уравнение (2.79).

Совершенно аналогично доказывается (2.80). Подставим в уравнение (2.3) с непрерывным свободным членом g его решение

$$\psi(x) = g(x) + \bar{\mu} \int_a^b \Gamma_{\mathcal{K}^*}(x, y; \bar{\mu}) g(y) dy$$

и учтём связь резольвент ядер $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$. (Проведите подробное доказательство!) ■

Замечание 2.32.

Пусть μ — характеристическое значение ядра $\mathcal{K}$, ν — его правильное значение из достаточно малой окрестности точки μ . Из (2.79) следует, что при любом фиксированном $y \in [a, b]$ коэффициент $c_{-q}(x, y)$

в разложении (2.78) как функция переменной x является собственной функцией ядра $\mathcal{K}$, отвечающей характеристическому значению μ . Действительно, подставим (2.78) в уравнение

$$\Gamma(x, y; \nu) = \mathcal{K}(x, y) + \nu \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \Gamma(t, y; \nu) dt,$$

умножим обе части полученного равенства на $(\nu - \mu)^q$, затем перейдем к пределу при $\nu \rightarrow \mu$. Тогда получим $c_{-q}(x, y) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, t) c_{-q}(t, y) dt$.

Совершенно аналогично из (2.80) следует, что при любом фиксированном $x \in [a, b]$ коэффициент $c_{-q}(x, y)$ в (2.78) как функция переменной y является собственной функцией ядра, союзного ядру $\mathcal{K}(x, y)$ (докажите!). ■

Пример 2.10.

В примере 2.8 найдена резольвента $\Gamma(x, y; \nu) = \frac{3xy}{3 - \nu}$ ядра xy в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Точка $\mu_1 = 3$ — простой полюс резольвенты ($q = 1$). При любом фиксированном $y \in [0, 1]$ функция $\overset{\circ}{\varphi}(x) = -3xy$ удовлетворяет уравнению $\overset{\circ}{\varphi}(x) = 3 \int_0^1 xt \overset{\circ}{\varphi}(t) dt$ (проверьте!). ■

Из (2.80) вытекает формула для решения φ уравнения (2.1), если его свободный член f имеет специальный вид. Прежде чем сделать замечание об этой формуле, дадим важное определение.

Определение 2.8.

Пусть ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S . Непрерывную на $[a, b]$ функцию $f(x)$ называют истокообразно представимой через ядро $\mathcal{K}$, если существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\omega(x)$,

что $f(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy$ для всех $x \in [a, b]$. ■

Истокообразная представимость функции f означает, что она принадлежит множеству значений $Ran A$ интегрального оператора

$$(A\omega)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy.$$

Замечание 2.33.

Пусть свободный член f в уравнении (2.1) истокообразно представим через ядро этого уравнения $\mathcal{K}$, и пусть μ — правильное значение ядра $\mathcal{K}$. Подставляя выражение свободного члена в формулу (2.33), и изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, получим

решение в виде

$$\varphi(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy + \int_a^b \left(\mu \int_a^b \mathcal{K}(t, y) \Gamma(x, t; \mu) dt \right) \omega(y) dy.$$

Используя (2.80), приходим к формуле

$$\varphi(x) = \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) \omega(y) dy. \blacksquare$$

Замечание 2.34.

При $|\mu| < |\mu_1|$ подставим в (2.79) разложение (2.31) резольвенты Γ по степеням параметра μ . В левой части равенства (2.79) получим

$$\mathcal{K}(x, y) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu^{n-1} \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt,$$

а в правой части этого равенства получим

$$\mathcal{K}(x, y) + \int_a^b \left(\sum_{n=2}^{\infty} \mu^{n-1} \mathcal{K}(x, t) \mathcal{K}_{n-1}(t, y) \right) dt. \quad (2.81)$$

Равенство (2.79) означает, что функциональный ряд в (2.81) можно проинтегрировать почленно по переменной t на $[a, b]$.

Точно так же равенство (2.80) означает, что функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \mu^{n-1} \mathcal{K}_{n-1}(x, t) \mathcal{K}(t, y)$ можно проинтегрировать почленно по t на $[a, b]$. $\blacksquare$

Следующее свойство резольвенты основано на её разложении в ряд Тейлора (2.31) в круге $|\mu| < |\mu_1|$ (см. свойство 2.3). Для фиксированного μ из этого круга функцию $\Gamma(x, y; \mu)$ будем рассматривать как ядро, непрерывное в замкнутом квадрате S . Построим его итерированные ядра $\Gamma_n(x, y; \mu)$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.6.

Для любых натуральных чисел l и n , $l > n$, выполнено равенство

$$\sum_{j=n}^{l-1} (j-1)(j-2) \dots (j-n+1) = \frac{1}{n} (l-1)(l-2) \dots (l-n).$$

Доказательство для произвольного фиксированного n проводится индукцией по l (докажите!). $\blacksquare$

Свойство 2.5.

В круге $|\mu| < |\mu_1|$ справедливо равенство

$$\Gamma_n(x, y; \mu) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \mu^{n-1}} \Gamma(x, y; \mu), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.82)$$

Доказательство проведём индукцией по n . Не будем обосновывать возможность почленного интегрирования функциональных рядов по переменной t на $[a, b]$.

Проверим, что $\Gamma_2(x, y; \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma(x, y; \mu)$. Напомним, что внутри круга сходимости ряд Тейлора (2.31) сходится абсолютно, и что его можно дифференцировать по переменной μ почленно любое число раз. Кроме того, если два ряда сходятся абсолютно, то и ряд из всевозможных произведений их членов, составленный в каком угодно порядке, сходится абсолютно, и его сумма равна произведению сумм этих двух рядов.

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, y; \mu) &= \int_a^b \Gamma(x, t; \mu) \Gamma(t, y; \mu) dt = \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{i-1} \mathcal{K}_i(x, t) \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu^{j-1} \mathcal{K}_j(t, y) \right) dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{i+j-2} \int_a^b \mathcal{K}_i(x, t) \mathcal{K}_j(t, y) dt. \end{aligned}$$

Полагая $i + j = l$, получаем

$$\Gamma_2(x, y; \mu) = \sum_{l=2}^{\infty} \mu^{l-2} (l-1) \mathcal{K}_l(x, y) = \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma(x, y; \mu).$$

Пусть формула (2.82) выполнена для натурального n ; докажем её для $n+1$. Используем при этом лемму 2.6.

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1}(x, y; \mu) &= \int_a^b \Gamma(x, t; \mu) \Gamma_n(t, y; \mu) dt = \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{i-1} \mathcal{K}_i(x, t) \right) \left(\frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=n}^{\infty} (j-1) \dots (j-n+1) \mu^{j-n} \mathcal{K}_j(t, y) \right) dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \mu^{i+j-n-1} (j-1) \dots (j-n+1) \int_a^b \mathcal{K}_i(x, t) \mathcal{K}_j(t, y) dt. \end{aligned}$$

Полагая $i + j = l$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1}(x, y; \mu) &= \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \mu^{l-n-1} \mathcal{K}_l(x, y) \left(\sum_{j=n}^{l-1} (j-1) \dots (j-n+1) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{l=n+1}^{\infty} (l-1) \dots (l-n) \mu^{l-(n+1)} \mathcal{K}_l(x, y) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \Gamma(x, y; \mu). \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 2.6.

Пусть μ — фиксированное правильное значение непрерывного ядра

$\mathcal{K}$, а μ_i — ближайшее к μ его характеристическое значение. Тогда в круге $\{\nu \in \mathbb{C} \mid |\nu - \mu| < |\mu - \mu_i|\}$ справедливо разложение резольвенты в ряд Тейлора:

$$\Gamma(x, y; \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu - \mu)^{n-1} \Gamma_n(x, y; \mu). \quad (2.83)$$

Доказательство.

Голоморфная в окрестности точки μ функция Γ представима в этой окрестности рядом Тейлора:

$$\Gamma(x, y; \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu - \mu)^{n-1} \left(\frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \nu^{n-1}} \Gamma(x, y; \nu) \right) \Bigg|_{\nu=\mu}.$$

Положим $\nu = \eta + \mu$ и запишем это представление в виде

$$\Gamma(x, y; \eta + \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{n-1} \left(\frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \eta^{n-1}} \Gamma(x, y; \eta + \mu) \right) \Bigg|_{\eta=0}.$$

Из (2.82) получаем (2.83). ■

Свойство 2.6 (другая формулировка).

Если при фиксированном правильном значении μ ядра $\mathcal{K}$ функцию $\Gamma(x, y; \mu)$ рассматривать как новое ядро интегрального уравнения

$$\Phi(x) - \eta \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) \Phi(y) dy = F(x), \quad a \leq x \leq b,$$

с параметром η , то резольвента этого нового уравнения равна $\Gamma(x, y; \mu + \eta)$.

Доказательство.

Пусть μ_i — ближайшее к μ характеристическое значение ядра $\mathcal{K}$. Резольвента нового уравнения единственна и при $|\eta| < |\mu - \mu_i|$ имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \eta^{n-1} \Gamma_n(x, y; \mu) = \Gamma(x, y; \mu + \eta)$. ■

Замечание 2.34.

Формулы (2.1) и (2.33) можно рассматривать как обратные друг другу при правильном значении μ ядра $\mathcal{K}$. Действительно, равенство (2.33) можно записать как уравнение относительно функции $f(x)$ с ядром $\Gamma(x, y; \mu)$ и параметром $\eta = -\mu$. Тогда его резольвентой будет $\Gamma(x, y; \mu + \eta)$, и при $\eta = -\mu$ решение f даётся формулой (2.1), т.к. $\Gamma(x, y; 0) = \mathcal{K}(x, y)$. ■

Свойство 2.7.

При любых правильных значениях μ и $\mu + \eta$ непрерывного ядра $\mathcal{K}$ его резольвента удовлетворяет в квадрате S следующим уравнениям:

$$\Gamma(x, y; \mu + \eta) = \Gamma(x, y; \mu) + \eta \int_a^b \Gamma(x, t; \mu) \Gamma(t, y; \mu + \eta) dt, \quad (2.84)$$

$$\Gamma(x, y; \mu + \eta) = \Gamma(x, y; \mu) + \eta \int_a^b \Gamma(t, y; \mu) \Gamma(x, t; \mu + \eta) dt. \quad (2.85)$$

Доказательство.

Равенство (2.84) следует из второй формулировки свойства 2.6 и равенства (2.79). Равенство (2.85) следует из того же свойства и равенства (2.80). ■

Замечание 2.35.

Доказанные в данном разделе свойства резольвенты сохраняются и для фредгольмова ядра $\mathcal{K}$, не обязательно непрерывного. При этом надо считать, что свободный член f в уравнении (2.1) принадлежит $L_2[a, b]$, и что решение уравнения ищем в $L_2[a, b]$. В этом случае, представляя ядро в виде $\mathcal{K} = \mathbf{N} + \mathbf{L}$, надо учесть, что метод последовательных приближений заведомо сходится при $|\mu| < \frac{1}{P_{\mathbf{L}}}$. Если ядро $\mathcal{K} \in L_2(S)$, то при правильном μ его резольвента как функция точки (x, y) тоже является ядром класса $L_2(S)$. ■

Замечание 2.36.

Если ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S , то как функции одной переменной x непрерывны все $\mathcal{K}_n(x, x)$ и $\Gamma_n(x, x; \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ (для правильных значений параметра). Поэтому существуют интегралы от этих функций на отрезке $[a, b]$, называемые их следами. Полагая $y = x$ в (2.83) и интегрируя функциональный ряд почленно (эта операция требует отдельного обоснования!), получим равенство

$$\int_a^b \Gamma(x, x; \nu) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu - \mu)^{n-1} \int_a^b \Gamma_n(x, x; \mu) dx.$$

В частности, при $\mu = 0$ имеем для $|\nu| < |\mu_1|$:

$$\int_a^b \Gamma(x, x; \nu) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{n-1} \text{tr} \mathcal{K}_n. \quad (2.86)$$

2.8. Ряды Фредгольма.

В теории Фредгольма для произвольного $l \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{K}(\xi_1, \dots, \xi_l)$ принято обозначать определитель матрицы с элементами $\mathcal{K}(\xi_i, \zeta_j)$, $i, j = 1, \dots, l$. Рассмотрим определитель $\mathcal{K}(x, t_1, \dots, t_n)$ порядка $n + 1$; переменные $x, y, t_1, \dots, t_n$ здесь независимы. Минор, получаемый вычёркиванием его первой строки и $(j + 1)$ -го столбца, обозначим через V_j . Минор, получаемый вычёркиванием первого столбца и $(i + 1)$ -ой строки, обозначим через W_i . Миноры V_0 и W_0 совпадают и равны $\mathcal{K}(t_1, \dots, t_n)$. При $j = 1, \dots, n$ все миноры V_j зависят от $y, t_1, \dots, t_n$, а при $i = 1, \dots, n$ все миноры W_i зависят от $x, t_1, \dots, t_n$. Раскрывая определитель по его первой строке, получим

$$\mathcal{K}(x, t_1, \dots, t_n) = \mathcal{K}(x, y)V_0 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \mathcal{K}(x, t_j)V_j. \quad (2.87)$$

Раскрывая определитель по первому столбцу, получим

$$\mathcal{K}(x, t_1, \dots, t_n) = \mathcal{K}(x, y)W_0 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathcal{K}(t_i, y)W_i. \quad (2.88)$$

Для $n \in \mathbb{N}$ введём специальные обозначения n -кратных интегралов:

$$B_n(x, y) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \mathcal{K}(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n, \quad (2.89)$$

$$u_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \mathcal{K}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (2.90)$$

Кроме того, положим

$$u_0 = 1, \quad B_0(x, y) = \mathcal{K}(x, y). \quad (2.91)$$

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно, то и все функции $B_n(x, y)$ непрерывны.

Лемма 2.7.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в квадрате S . Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы рекуррентные формулы:

$$B_n(x, y) = \mathcal{K}(x, y)u_n - n \int_a^b \mathcal{K}(x, t)B_{n-1}(t, y)dt, \quad (2.92)$$

$$B_n(x, y) = \mathcal{K}(x, y)u_n - n \int_a^b \mathcal{K}(t, y)B_{n-1}(x, t)dt. \quad (2.93)$$

Доказательство.

Для доказательства формулы (2.92) в n -кратном интеграле (2.89) раскроем определитель $\mathcal{K}\begin{pmatrix} x, t_1, \dots, t_n \\ y, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix}$ по первой строке (см. (2.87)). В миноре V_1 и во множителе $\mathcal{K}(x, t_1)$ переобозначим независимые переменные: положим $t = t_1$, $\tau_1 = t_2, \dots, \tau_{n-1} = t_n$. Тогда $V_1 = \mathcal{K}\begin{pmatrix} t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \\ y, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \end{pmatrix}$. Вообще, при $j > 1$ в каждом миноре V_j и во множителе $\mathcal{K}(x, t_j)$ переобозначим независимые переменные: положим $t = t_j$, $\tau_1 = t_1, \dots, \tau_{j-1} = t_{j-1}$, $\tau_j = t_{j+1}, \dots, \tau_{n-1} = t_n$. Тогда $V_j = (-1)^{j-1} \mathcal{K}\begin{pmatrix} t, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \\ y, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \end{pmatrix}$; чтобы убедиться в этом, достаточно j -ую строку минора V_j переместить последовательно вверх в положение первой строки. Отсюда и получаем формулу (2.92).

Раскрывая определитель по первому столбцу (см. (2.88)), совершенно аналогично получим (2.93) (докажите!). ■

Замечание 2.37.

Формула (2.92) вместе с (2.90) и (2.91) однозначно определяет последовательность функций $B_n(x, y)$, которые можно задать в виде (2.89). Аналогично и формула (2.93) однозначно определяет функции вида (2.89). ■

Замечание 2.38.

$$u_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x)dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.94)$$

По теореме 2.8 резольвента Фредгольма непрерывного ядра $\mathcal{K}$ представляет собой отношение целых функций переменной μ :

$$\Gamma(x, y; \mu) = \frac{D(x, y; \mu)}{D(\mu)}. \quad (2.95)$$

Функцию $D(\mu)$ называют определителем Фредгольма, функцию $D(x, y; \mu)$ — первым минором Фредгольма; $D(0) = 1$. Напомним, что целая функция — это функция, голоморфная во всей μ -плоскости. Запишем $D(\mu)$ и $D(x, y; \mu)$ в виде степенных рядов Фредгольма

$$D(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} u_n \mu^n, \quad (2.96)$$

$$D(x, y; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, y) \mu^n \quad (2.97)$$

и докажем, что их коэффициенты u_n и $B_n(x, y)$ связаны рекуррентными формулами (2.92) и (2.93), и что ряды (2.96) и (2.97) с такими коэффициентами сходятся при всех $\mu \in \mathbb{C}$. Для доказательства достаточно воспользоваться интегральными уравнениями для резольвенты (2.79) или (2.80) и доказать возможность почленного интегрирования ряда (2.97) по одной из действительных переменных. Из (2.95) видно, что при всех правильных значениях μ уравнение (2.79) можно записать в виде

$$D(x, y; \mu) = K(x, y)D(\mu) + \mu \int_a^b K(x, t)D(t, y; \mu)dt, \quad (2.98)$$

а уравнение (2.80) — в виде

$$D(x, y; \mu) = K(x, y)D(\mu) + \mu \int_a^b K(t, y)D(x, t; \mu)dt. \quad (2.99)$$

При $\mu = 0$ в силу условия $D(0) = 1$ имеем $u_0 = 1$, а из (2.98) (или из (2.99)) при $\mu = 0$ получаем $B_0(x, y) = K(x, y)$. Подставим ряды (2.96), (2.97) в равенства (2.98) и (2.99), проинтегрируем почленно по переменной t на $[a, b]$ (возможность этой операции будет обоснована ниже) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях переменной μ в левой и в правой частях равенств. Тогда получим (2.92) и (2.93) (проверьте!).

Лемма 2.8 (неравенство Адамара*).

Если все элементы θ_{ij} определителя Θ порядка n удовлетворяют неравенствам $|\theta_{ij}| \leq M$, то $|\Theta| \leq M^n \sqrt{n^n}$.

Доказательство см. в [3], гл.2, §3; [13], гл.3, §16. ■

Замечание 2.39.

Неравенство Адамара является следствием простого геометрического факта: объём параллелепипеда в n -мерном пространстве не превышает произведения длин его рёбер, исходящих из одной вершины. ■

Утверждение 2.15.

Пусть ядро $K(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S . Тогда ряд (2.96) с коэффициентами (2.90) при всех $\mu \in \mathbb{C}$ сходится абсолютно; ряд (2.97) с коэффициентами (2.89) при всех $\mu \in \mathbb{C}$ сходится абсолютно и равномерно по (x, y) в замкнутом квадрате S . При всех $\mu \in \mathbb{C}$ ряды (2.96), (2.97) удовлетворяют равенствам (2.98) и (2.99).

Доказательство.

Пусть $M = \max_S |K(x, y)|$. По лемме 2.8 $|K(t_1, \dots, t_n)| \leq M^n \sqrt{n^n}$. Поэтому имеем оценку $|u_n| \leq M^n \sqrt{n^n} (b-a)^n$. По признаку Даламбера**

*Адамар Жак Саломон (1865–1963) — французский математик.

**Д’Аламбер Жан Лерон (1717–1783) — французский математик.

в предельной форме отсюда при всех значениях μ следует абсолютная сходимость ряда (2.96) (проверьте!).

Для $B_n(x, y)$ имеем оценку $|B_n(x, y)| \leq M^{n+1} \sqrt{(n+1)^{n+1}} (b-a)^n$, из которой по признаку Даламбера в предельной форме при всех μ следует абсолютная сходимость ряда (2.97), а по признаку Вейерштрасса — его равномерная на S сходимость.

Из равномерной сходимости ряда (2.97) следует возможность интегрировать его почленно по t на $[a, b]$ в (2.98) и (2.99). Тогда по лемме 2.7 равенства (2.98) и (2.99) выполнены для всех $\mu \in \mathbb{C}$, в том числе и для характеристических значений. ■

Пример 2.11.

$a = 0, b = 1, \mathcal{K}(x, y) = e^{x-y}$. Построим $D(\mu)$, $D(x, y; \mu)$ и резольвенту Γ ядра $\mathcal{K}$, пользуясь рекуррентной формулой (2.92) (или (2.93)), либо непосредственно вычисляя интегралы (2.89) и (2.90). $u_0 = 1, u_1 = 1, u_n = 0$ при $n \geq 2$; $B_0(x, y) = e^{x-y}, B_n(x, y) \equiv 0$ при $n \geq 1$.

Отсюда $D(\mu) = 1 - \mu, D(x, y; \mu) = e^{x-y}, \Gamma(x, y; \mu) = \frac{e^{x-y}}{1 - \mu}$ (см. пример 2.9). ■

Задача 2.13.

Для ядра $\mathcal{K}^*(x, y)$, сопряжённого ядру $\mathcal{K}(x, y)$, введём определители

$$\mathcal{K}^* \begin{pmatrix} \xi_1, \dots, \xi_l \\ \zeta_1, \dots, \zeta_l \end{pmatrix} = \overline{\mathcal{K} \begin{pmatrix} \zeta_1, \dots, \zeta_l \\ \xi_1, \dots, \xi_l \end{pmatrix}}$$

Пользуясь этими определениями, докажите следствие 2.6. ■

Задача 2.14.

Докажите, что при $|\mu| < |\mu_1|$ справедлива формула $\frac{D'(\mu)}{D(\mu)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \text{tr} \mathcal{K}_n$. (Указание: используйте (2.86) и (2.94)). ■

Замечание 2.40.

Собственные функции непрерывного ядра можно выразить в виде отношения некоторых степенных рядов (по степеням переменной μ), которые называют минорами Фредгольма. При этом можно доказать, что геометрическая кратность характеристического значения не превосходит его алгебраической кратности, т.е. кратности корня уравнения $D(\mu) = 0$. ■

Замечание 2.41.

Результаты данного раздела сохраняются и для ограниченного в S фредгольмова ядра $\mathcal{K}$, не обязательно непрерывного. Можно доказать, что ряды Фредгольма являются целыми функциями от μ и в случае неограниченного фредгольмова ядра. ■

Замечание 2.42.

Ряды (2.96) и (2.97) Фредгольм получил, исходя из аппроксимации интеграла в уравнении (2.1) интегральной суммой. ■

Контрпример 2.4.

Вернёмся к контрпримеру 2.1. Пусть в уравнении

$$\varphi(x) - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

с нефредгольмовым ядром функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$; решения φ ищем в классе абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций. Обозначим через $\Phi(\omega)$, $\kappa(\omega)$, $F(\omega)$ преобразования Фурье функций $\varphi(x)$, $e^{-|x|}$, $f(x)$; легко найти

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}.$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения и воспользуемся теоремой о преобразовании Фурье свёртки: $\Phi(\omega) - \frac{2\mu}{1+\omega^2} \Phi(\omega) = F(\omega)$. Если $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \geq \frac{1}{2}$, то в выбранном классе функций решений φ нет. Для всех остальных $\mu \in \mathbb{C}$ получаем $\Phi(\omega) = \frac{1+\omega^2}{1-2\mu+\omega^2} F(\omega)$. Тогда, вычисляя обратное преобразование Фурье, имеем

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mu}{1-2\mu+\omega^2} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Запишем это решение в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x-y; \mu) f(y) dy.$$

Ясно, что преобразование Фурье функции $\Gamma(x; \mu)$ равно $\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1-2\mu+\omega^2)}$. Вычисляя обратное преобразование Фурье, найдем

$$\Gamma(x; \mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1-2\mu+\omega^2} d\omega.$$

Для этого воспользуемся леммой Жордана, учитывая знак x , и вычислим интеграл при помощи вычетов:

$$\Gamma(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{1-2\mu}} \exp\{-\sqrt{1-2\mu}|x|\}.$$

функция $\sqrt{1-2\mu}$ не является целой: точка $\mu = \frac{1}{2}$ — её точка ветвления. ■

Задачи к главе 1.

1. Докажите, что интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) F(y, \varphi(y)) dy = (b - a)^{-1} [(c_2 - c_1)x + (c_1 b - c_2 a)]$$

с ядром $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} (b - x)(y - a)(b - a)^{-1}, & a \leq y \leq x, \\ (x - a)(b - y)(b - a)^{-1}, & x \leq y \leq b, \end{cases}$

эквивалентно краевой задаче

$$\varphi''(x) + \mu F(x, \varphi(x)) = 0, \quad \varphi(a) = c_1, \quad \varphi(b) = c_2.$$

2. Пусть $\alpha > 0$. Проверьте, что разрывная функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \alpha, \\ \frac{1}{2}, & x = \alpha, \\ 0, & x > \alpha \end{cases}$$

удовлетворяет на $0 \leq x < +\infty$ каждому из уравнений

$$\int_0^{+\infty} \cos(xy) \varphi(y) dy = \frac{\sin(\alpha x)}{x}, \quad \int_0^{+\infty} \sin(xy) \varphi(y) dy = \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x}.$$

3. Найдите на $0 \leq x < +\infty$ непрерывное решение уравнения

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ с ядром } \mathcal{K}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy).$$

4. Найдите на $0 \leq x < +\infty$ непрерывное решение уравнения

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = x e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ с ядром } \mathcal{K}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(xy).$$

5. Найдите на $0 \leq x < +\infty$ непрерывное решение уравнения

$$\int_0^{+\infty} \sin(xy) \varphi(y) dy = f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

6. Найдите на $0 \leq x < +\infty$ непрерывное решение уравнения

$$\int_0^{+\infty} \sin(xy) \varphi(y) dy = f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & x = \pi \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

7. Найдите неограниченное непрерывное на $0 < x < +\infty$ решение уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(xy) \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

8. Найдите неограниченное непрерывное на $0 < x < +\infty$ решение уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(xy) \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

9. Пусть функции $\mathcal{K}$ и f зависят от одной действительной переменной, $\mathcal{K} \in L_2(-\infty, +\infty)$, $f \in L_2(-\infty, +\infty)$. Решение φ уравнения

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

будем искать в классе функций $L_2(-\infty, +\infty)$. Обозначим через $\Phi(\omega)$, $\varkappa(\omega)$, $F(\omega)$ преобразования Фурье функций φ , $\mathcal{K}$, f :

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \varphi(x) dx \text{ и так же для } \varkappa \text{ и } F. \text{ Докажите, что если}$$

при всех $\omega \in \mathbb{R}$ выполнено условие $1 - \sqrt{2\pi} \varkappa(\omega) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi} \varkappa(\omega)} e^{i\omega x} d\omega = \\ &= f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi} \varkappa(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi} \varkappa(\omega)} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

10. При каких значениях $\mu \in \mathbb{C}$ уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_0^1 \overset{\circ}{\varphi}^2(y) dy = 0$$

имеет в $\widetilde{L}_2[0, 1]$ нетривиальные решения? Найдите все значения параметра μ , при которых уравнение

$$\varphi(x) - \mu \int_0^1 \varphi^2(y) dy = 1$$

имеет в $\widetilde{L}_2[0, 1]$ действительные решения; найдите все такие решения; найдите все комплексные решения этого уравнения.

11. При каких значениях $\mu \in \mathbb{C}$ уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_0^1 xy^2 \overset{\circ}{\varphi}^2(y) dy = 0$$

имеет в $C[0, 1]$ нетривиальные решения? Найдите все значения параметра μ , при которых уравнение

$$\varphi(x) - \mu \int_0^1 xy^2 \varphi^2(y) dy = x$$

имеет в $C[0, 1]$ действительные решения; найдите все такие решения; найдите все комплексные решения этого уравнения.

Задачи к главе 2.

1. Докажите, что геометрическая кратность r характеристического значения μ непрерывного ядра $\mathcal{K}$ конечна и удовлетворяет неравенству $r \leq |\mu|^2 P_{\mathcal{K}}^2$.

2. Сформулируйте теоремы Фредгольма в терминах союзных уравнений.

3. Выполнены ли для уравнения $\varphi(x) - 2 \int_0^1 x^2 y \varphi(y) dy = 1$, $0 \leq x \leq 1$, условия теоремы 2.5? Выполнены ли условия теоремы 2.6? Является ли решение φ непрерывной функцией? Выбрав начальное приближение $\varphi_0(x) \equiv 1$, постройте последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ и найдите $\varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x)$. Проверьте, что $\varphi(x)$ удовлетворяет задаче о неподвижной точке отображения $(B\varphi)(x) = 2 \int_0^1 x^2 y \varphi(y) dy + 1$. Найдите решение уравнения в виде $\varphi(x) = 1 + 2px^2$, где $p = \int_0^1 y \varphi(y) dy = \text{const.}$

4. Найдите непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \mu \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} \varphi(y) dy = x, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

методом последовательных приближений с начальным приближением $\varphi_0(x) \equiv 0$; при каких μ последовательные приближения сходятся к точному решению? Найдите непрерывное решение этого уравнения как уравнения с вырожденным ядром. Найдите резольвенту Фредгольма.

5. Найдите непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^1 (x+y) \varphi(y) dy = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

решая его как уравнение с вырожденным ядром. Найдите резольвенту Фредгольма. Сравните $\mu = 1$ с характеристическими числами.

$$6. a = -1, b = 1; \gamma(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решите задачу 2.10 раздела 2.5 для следующих ядер:

- 1.) xy ; 2.) xy^3 ; 3.) $3|x|\gamma(y) - 4x^2\gamma(-y)$; 4.) $3\gamma(x)y + 5\gamma(-x)y^3$;
 5.) $3\gamma(x)|y| + 4\gamma(-x)y^2$; 6.) $3x\gamma(y) - 5x^3\gamma(-y)$; 7.) $3xy - 5x^2y^2$;
 8.) $5x^2y - 3xy^2$; 9.) $3xy + 5x^2y^2$; 10.) $12(x\gamma^2(y) + \gamma(x)y)$.

7. Пусть $\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^l \xi_i(x) \zeta_i(y)$, где система функций $\{\xi_i\}_{i=1}^l$ не

обязательно линейно независима на $a \leq x \leq b$, а система функций $\{\zeta_i\}_{i=1}^l$ не обязательно линейно независима на $a \leq y \leq b$. Выберем в $\{\xi_i\}_{i=1}^l$ какую-либо наибольшую линейно независимую подсистему $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$. Тогда для всех номеров i имеем разложения $\xi_i(x) = \sum_{s=1}^k u_{ii_s} \xi_{i_s}(x)$ с коэффициентами u_{ii_s} . Выберем в $\{\zeta_j\}_{j=1}^l$ какую-либо наибольшую линейно независимую подсистему $\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_n}$. Тогда для всех номеров j имеем разложения $\zeta_j(y) = \sum_{t=1}^n v_{jj_t} \zeta_{j_t}(y)$ с коэффициентами v_{jj_t} . Ядро $\mathcal{K}$ принимает вид $\mathcal{K}(x, y) = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n w_{i_s j_t} \xi_{i_s}(x) \zeta_{j_t}(y)$, где $w_{i_s j_t} = \sum_{i=1}^l u_{ii_s} v_{ij_t}$ (проверьте!).

Докажите, что ядро $\mathcal{K}$ можно представить в виде $\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y)$, где система функций $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ линейно независима на $a \leq x \leq b$, и каждая из них является линейной комбинацией функций $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$, а система функций $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ линейно независима на $a \leq y \leq b$, и каждая из них является линейной комбинацией функций $\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_n}$.

8. Докажите, что всякий многочлен от двух переменных x и y можно представить в виде $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y)$, где $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ — линейно независимая система многочленов от x , а $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ — линейно независимая система многочленов от y .

9. Приведите к виду вырожденного ядра многочлен $xy + x^2 y^2 + x^3(y + y^2) + (x + x^2)(y + 2y^2)$.

10. Пусть абсолютно сходится числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$, и n — фиксированное натуральное число. Докажите, что последовательность тригонометрических многочленов $\mathbf{N}^{(m)}(x, y) = \sum_{i=1}^m u_i \sin(ix) \cos((i+n)y)$ при $m \rightarrow +\infty$ равномерно на квадрате $S = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ сходится к непрерывному ядру $\mathcal{K}(x, y)$. Будет ли вырожденным ядро $\mathcal{K}$, если множество отличных от нуля чисел u_i бесконечно? Найдите резольвенту Фредгольма ядра $\mathbf{N}^{(m)}$.

11. Пусть абсолютно сходится числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$, и n — фиксированное натуральное число. Докажите, что последовательность тригонометрических многочленов $\mathbf{N}^{(m)}(x, y) = \sum_{i=1}^m u_i \sin(ix) \sin((i+n)y)$ при $m \rightarrow +\infty$ равномерно на квадрате $S = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ сходится к непрерывному ядру $\mathcal{K}(x, y)$. Будет ли вырожденным ядро $\mathcal{K}$, если множество отличных от нуля чисел u_i бесконечно? При $1 \leq m \leq 2n$ найдите резольвенту Фредгольма ядра $\mathbf{N}^{(m)}$. Для каждого целого неотрицательного числа l докажите, что если $nl < m \leq n(l+1)$, то резольвента ядра $\mathbf{N}^{(m)}$ является многочленом от μ степени не выше l .

12. Верно ли, что резольвента суммы двух ядер равна сумме их резольвент? Найдите резольвенты ядер x , y , $x+y$ в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

13. Проверьте равенства (2.79) и (2.80) для ядер x , y , $x+y$ в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ и их резольвент.

14. Докажите, что при правильном значении μ непрерывного ядра $\mathcal{K}$ его резольвента Γ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma(x, y; \mu) = \int_a^b \Gamma(x, t; \mu) \Gamma(t, y; \mu) dt.$$

15. Пусть Γ — резольвента непрерывного ядра $\mathcal{K}$, μ — его правильное значение, $\Gamma_n(x, y; \mu)$ — n -ое итерированное ядро ядра $\Gamma(x, y; \mu)$. Докажите, что $\Gamma_n(x, y; 0) = \mathcal{K}_n(x, y)$.

16. $a = 0$, $b = 1$. Для следующих ядер $\mathcal{K}(x, y)$ найдите ряды Фредгольма $D(\mu)$ и $D(x, y; \mu)$. Проверьте, находя резольвенты этих вырожденных ядер.

1.) x ; 2.) y ; 3.) $x+y$; 4.) $x-y$; 5.) $x^2y + xy^2$.

Ответы задач к главе 1.

3. $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 4. $\varphi(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. 5. $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$.
6. $\varphi(x) = \frac{x \sin(\pi x)}{1-x^2}$. 7 и 8. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Указание:
 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

10. При всех $\mu \neq 0$ уравнение с нулевым свободным членом имеет единственное нетривиальное решение $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv \frac{1}{\mu}$. Уравнение с равным 1 свободным членом при $\mu = 0$ имеет одно решение $\varphi(x) \equiv 1$, при $\mu = \frac{1}{4}$ имеет одно решение $\varphi(x) \equiv 2$, при каждом ненулевом действительном $\mu < \frac{1}{4}$ имеет два действительных решения $\varphi(x) \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2\mu}$, при всех остальных комплексных μ имеет по два комплексных постоянных решения.

11. При всех $\mu \neq 0$ уравнение с нулевым свободным членом имеет единственное нетривиальное решение $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \frac{5}{\mu}x$. Уравнение со свободным членом x при $\mu = 0$ имеет одно решение $\varphi(x) = x$, при $\mu = \frac{5}{4}$ имеет одно решение $\varphi(x) = 2x$, при каждом ненулевом действительном $\mu < \frac{5}{4}$ имеет два действительных решения $\varphi(x) = \frac{x}{2\mu}(5 \pm \sqrt{25-20\mu})$, при всех остальных комплексных μ имеет по два комплексных решения.

Ответы задач к главе 2.

1. Характеристическое значение $\mu \neq 0$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — любые линейно независимые на отрезке $[a, b]$ собственные функции ядра $\mathcal{K}$, отвечающие этому значению μ . Без ограничения общности можно считать, что они образуют ортонормированную систему; в противном случае применим к ним процесс ортогонализации. Равенства $\frac{\varphi_i(x)}{\mu} = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi_i(y) dy$, $i = 1, \dots, m$, запишем в виде $\frac{\varphi_i(x)}{\bar{\mu}} = \int_a^b \overline{\mathcal{K}(x, y)} \overline{\varphi_i(y)} dy$. Это значит, что при фиксированном x число

$\frac{\overline{\varphi_i(x)}}{\overline{\mu}}$ является коэффициентом Фурье функции $\overline{\mathcal{K}(x, y)}$ переменной y .

Запишем неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\varphi_i(x)}{\mu} \right|^2 \leq \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$$

(операции комплексного сопряжения здесь можно убрать). Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x на $[a, b]$ и учтём, что функции φ_i нормированы. Тогда получим

$$\frac{m}{|\mu|^2} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{|\mu|^2} \leq \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy = P_{\mathcal{K}}^2.$$

Итак, $m \leq |\mu|^2 P_{\mathcal{K}}^2$.

3. Условия теоремы 2.5 не выполнены. Условия теоремы 2.6 выполнены. Решение φ непрерывно на $[0, 1]$. $\varphi(x) = 2x^2 + 1$.

4. $\varphi(x) = x + \frac{2\mu}{2-\mu}e^{-x}$. Последовательные приближения сходятся при $|\mu| < 2$. $\Gamma(x, y; \mu) = \frac{2}{2-\mu}e^{-(x+y)}$.

5. $\varphi(x) = x$. $\Gamma(x, y; \mu)$ см. в задаче 12. $\mu_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{3}$. $|\mu_1| < 1 < |\mu_2|$.

7. Указание. Упрощая обозначения, рассмотрим ядро $\mathcal{K}(x, y) = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n w_{st} \gamma_s(x) \delta_t(y)$, где система функций $\{\gamma_s\}_{s=1}^k$ линейно независима и система функций $\{\delta_t\}_{t=1}^n$ линейно независима. Матрицу заданных коэффициентов w_{st} обозначим через W . Надо доказать, что $\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y)$, где $m = \text{rang} W$, система функций $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ линейно независима, и каждая из них является линейной комбинацией функций $\{\gamma_s\}_{s=1}^k$, а система функций $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ линейно независима, и каждая из них является линейной комбинацией функций $\{\delta_t\}_{t=1}^n$. Доказательство основано на теореме о базисном миноре матрицы W (не ограничивая общности, можно полагать, что матрица базисного минора находится в левом верхнем углу матрицы W).

$$9. (2x + x^3)(y + y^2) + x^2(y + 3y^2) = y(2x + x^2 + x^3) + y^2(2x + 3x^2 + x^3).$$

$$10. \Gamma(x, y; \mu) = \mathbf{N}^{(m)}(x, y).$$

$$11. \text{ Если } 1 \leq m \leq n, \text{ то } \Gamma(x, y; \mu) = \mathbf{N}^{(m)}(x, y). \text{ Если } n < m \leq 2n, \\ \text{то } \Gamma(x, y; \mu) = \mathbf{N}^{(m)}(x, y) + \frac{\pi\mu}{2} \sum_{i=1}^{m-n} u_i u_{i+n} \sin(ix) \sin((i + 2n)y).$$

$$12. \Gamma_x(x, y; \mu) = \frac{2x}{2 - \mu}, \Gamma_y(x, y; \mu) = \frac{2y}{2 - \mu}, \\ \Gamma_{x+y}(x, y; \mu) = \frac{(12xy - 6x - 6y + 4)\mu + 12(x + y)}{12 - 12\mu - \mu^2}.$$

Литература.

Основная литература.

1. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965. — 127с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.IV, часть первая, гл.1. — М.: Наука, 1974. — 336с.
3. Привалов И.И. Интегральные уравнения. — М.:URSS, Книжный дом „Либроком“, 2010. — 248с.
4. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Часть 1. — М.: ОГИЗ, 1949. — 380с.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. Гл.2, §7. — М.: Издательство Московского университета, 1994. — 206с.

Дополнительная литература.

6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. Введение, §4. Гл.4. — М.: Наука, 1976. — 296с.
7. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Гл.9, 11, 12. — М.: Наука, 1974. — 431с.
8. Васильева А.Б. Интегральные уравнения./А.Б. Васильева, Н.А.Тихонов.— М.: Издательство Московского университета, 1989. — 157с.
9. Волков В.Т. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. Гл. 1, 3./В.Т. Волков, А.Г. Ягола. — М.: КДУ, 2008. — 139с.
10. Волков В.Т. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Методы решения задач. Темы 1–7./В.Т. Волков, А.Г. Ягола. — М.:КДУ, 2007. — 138с.
11. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.:URSS, Издательство „Комкнига“, 2006. — 304с.
12. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. /М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. — М.: URSS, Издательство „Комкнига“, 2007. — 192с.
13. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. — 266с.
14. Забрейко П.П. Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека. /П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский, С.Г. Михлин, Л.С. Раковщик, В.Я. Стеценко. — М.: Наука, 1968. — 448с.

15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. — М.: Наука, 1969. — 656с.

Литература для дальнейшего изучения интегральных уравнений.

16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Лекции 18, 24, 25, 26. — М.: Наука, 1966. — 443с.

17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Гл.4. — М.: Наука, 1971. — 512с.

18. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. Гл.4. /А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979.

19. Гончарский А.В. Численные методы решения обратных задач астрофизики. Гл.3. /А.В. Гончарский, А.М. Черепашук, А.Г. Ягола. — М.: Наука, 1978. — 336с.

20. Дмитриев В.И. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. Учебное пособие. /В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М.: Издательство Московского университета, 1987.

21. Дмитриев В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. /В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М.: Издательство Московского университета, 2008.

22. Верлань А.Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Справочное пособие. /А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. — Киев: Наукова думка, 1978. — 291с.

Литература по интегральным уравнениям с точки зрения функционального анализа.

23. Ильин В.А. Основы математического анализа. Часть 2, гл.11, §4. /В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М.: Наука, 1973. — 447с.

24. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. Гл.2, §4. Гл.4, §5,6. Гл.9. /А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.:Наука,1972. — 496с.

25. Треногин В.А. Функциональный анализ. Гл.3,5,6. — М.:Наука, 1980. — 496с.

26. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. §4.5; 7.8; 11.6. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. — 352с.

27. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104с.

28. Канторович Л.В. Функциональный анализ. Гл. 13. /Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.:Наука, 1977. — 741с.

Оглавление

Глава 3 Интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода.	5
3.1 Оператор Вольтерры в пространстве непрерывных функций.	5
3.2 Построение решения интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода методом последовательных приближений. Резольвента Фредгольма уравнения Вольтерры.	7
3.3 Примеры решений уравнений Вольтерры.	15
3.4 Уравнение Вольтерры с непрерывным ядром, зависящим от разности аргументов. Применение преобразования Лапласа для его решения.	20
 Глава 4 Линейные операторы в линейных нормированных пространствах (некоторые понятия функционального анализа).	 25
4.1 Линейные ограниченные операторы.	25
4.2 Вполне непрерывные линейные операторы.	30
4.3 Сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве. . .	34
4.4 Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве и некоторые их свойства. Теорема о существовании характеристического значения у ненулевого вполне непрерывного самосопряжённого линейного оператора. .	36
 Глава 5 Линейные интегральные уравнения 2-го рода с самосопряжёнными ядрами. Теория Гильберта–Шмидта.	 43
5.1 Основные свойства интегральных операторов Фредгольма с самосопряжёнными ядрами.	43
5.2 Теорема Гильберта–Шмидта.	52
5.3 Билинейные ряды.	57
5.4 Решение неоднородного интегрального уравнения 2-го рода с непрерывным самосопряжённым ядром. Резольвента Фредгольма непрерывного самосопряжённого ядра.	62
5.5 Экстремальные свойства характеристических значений и собственных функций вполне непрерывного самосопряжённого линейного интегрального оператора. Неотрицательные и положительно определённые операторы. Теорема Мерсера.	69

5.5.1	Экстремальное свойство модуля характеристического числа.	69
5.5.2	Неотрицательный линейный оператор. Экстремальное свойство его характеристического числа.	70
5.5.3	Положительное симметричное ядро. Свойства характеристического числа с наименьшим модулем и отвечающей ему собственной функции.	72
5.5.4	Достаточное условие регулярной сходимости билинейного ряда самосопряжённого ядра.	73
5.6	Самосопряжённые краевые задачи. Задача Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова.	76
5.6.1	Самосопряжённые краевые задачи на собственные значения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.	76
5.6.2	Задача Штурма–Лиувилля.	80
5.6.3	Теорема Стеклова.	85
5.6.4	Задача Штурма–Лиувилля в более общей постановке.	86
	Задачи.	90
	Ответы.	96

Глава 3.

Интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода.

В данной главе будем изучать уравнения 2-го рода $\varphi - \mu A\varphi = f$, в которых интегральный оператор Вольтерры $(A\varphi)(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$ имеет переменный предел интегрирования. Как и в главе 2, обычно будем считать, что независимые переменные x и y изменяются на конечном отрезке $[a, b]$. Уравнение Вольтерры

$$\varphi(x) - \mu \int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.1)$$

является важным частным случаем уравнения (1.1).

3.1. Оператор Вольтерры в пространстве непрерывных функций.

Будем искать непрерывные на отрезке $[a, b]$ решения уравнения (3.1). Поэтому сделаем некоторые предположения о ядре $\mathcal{K}$ и свободном члене f . Функцию $\mathcal{K}(x, y)$ считаем непрерывной в замкнутом треугольнике $T = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, а в остальной части квадрата $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, т.е. при $y > x$, полагаем $\mathcal{K}(x, y) = 0$. На диагонали $y = x$ квадрата S ядро может иметь разрыв 1-го рода, если окажется, что $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$. Такое ядро ограничено в замкнутом квадрате S : $M = \max_S |\mathcal{K}(x, y)| < \infty$. Покажем, что в этом случае интегральный оператор A действует из $C[a, b]$ в $C[a, b]$.

Утверждение 3.1

Пусть ядро $\mathcal{K}$ удовлетворяет в квадрате S сделанным выше предположениям. Если $\varphi \in C[a, b]$, то $A\varphi \in C[a, b]$.

Доказательство.

Выберем произвольную непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию φ . Фиксируем произвольное $x_0 \in [a, b]$ и докажем непрерывность функции $(A\varphi)(x)$ в точке x_0 .

Введём обозначение: $N = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и оценим величину $\varkappa(x, x_0) = |(A\varphi)(x) - (A\varphi)(x_0)| =$
 $= \left| \int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy - \int_a^{x_0} \mathcal{K}(x_0, y)\varphi(y)dy \right|.$

Пусть $x \geq x_0 = a$. Тогда $(A\varphi)(a) = 0$, и будет выполнено неравенство $\varkappa(x, a) = \left| \int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy \right| \leq \int_a^x |\mathcal{K}(x, y)||\varphi(y)|dy \leq MN(x-a) < \varepsilon$, если выбрать x из условия $a \leq x < a + \frac{\varepsilon}{MN}$.

Пусть $x_0 > a$. Если $x \geq x_0$, то

$$\begin{aligned} \kappa(x, x_0) &= \left| \int_a^{x_0} (\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)) \varphi(y) dy + \int_{x_0}^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_a^{x_0} |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)| |\varphi(y)| dy + \int_{x_0}^x |\mathcal{K}(x, y)| |\varphi(y)| dy. \end{aligned}$$

Если $x \leq x_0$, то

$$\begin{aligned} \kappa(x, x_0) &= \left| \int_a^x (\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)) \varphi(y) dy - \int_x^{x_0} \mathcal{K}(x_0, y) \varphi(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_a^x |\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)| |\varphi(y)| dy + \int_x^{x_0} |\mathcal{K}(x_0, y)| |\varphi(y)| dy. \end{aligned}$$

В замкнутом треугольнике T непрерывная функция двух переменных $\mathcal{K}(x, y)$ равномерно непрерывна: для любого числа $\gamma > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\gamma) > 0$, что для каждой пары точек (x, y) и (x_0, y_0) в T , удовлетворяющих условию $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, будет выполнено неравенство $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y_0)| < \gamma$. Поэтому при всех y , удовлетворяющих неравенствам $a \leq y \leq \min\{x, x_0\}$, из неравенства $|x - x_0| < \delta$ будет следовать неравенство $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x_0, y)| < \gamma$. Тогда в обоих случаях расположения x и x_0 получим неравенство $\kappa(x, x_0) \leq \gamma N(b - a) + MN|x - x_0| < \varepsilon$, если выберем $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ из условия $\gamma < \frac{\varepsilon}{2N(b - a)}$, а точку x из условия

$$|x - x_0| < \min\{\delta(\gamma(\varepsilon)), \frac{\varepsilon}{2MN}\}. \blacksquare$$

Из утверждения 3.1 следует, что в задаче нахождения непрерывного решения уравнения (3.1) надо полагать $f \in C[a, b]$.

Докажем некоторые свойства итерированных ядер интегрального оператора Вольтерры.

Утверждение 3.2.

Пусть ядро $\mathcal{K}$ удовлетворяет в квадрате S предположениям, сделанным в начале данного раздела: $\mathcal{K} \in C(T)$ и $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $y > x$. Тогда при $n \geq 2$ итерированные ядра $\mathcal{K}_n$ выражаются формулой

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \begin{cases} \int_y^x \mathcal{K}(x, t) \mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt, & \text{если } y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x. \end{cases}$$

Доказательство.

В формуле

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \mathcal{K}(t, y) dt \quad (3.2)$$

имеем $\mathcal{K}(x, t) = 0$ при $t > x$ и $\mathcal{K}(t, y) = 0$ при $t < y$. Если $x < y$, то три числа x, y, t связаны одним из трех двойных неравенств: либо

$t \leq x < y$, либо $x < t < y$, либо $x < y \leq t$. То есть, если $x < y$, то либо $t > x$, либо $t < y$. Поэтому $\mathcal{K}_2(x, y) = 0$ при $x < y$. Если же $x \geq y$, то в (3.2) подынтегральная функция может быть отличной от нуля только при $y \leq t \leq x$. Этим доказано утверждение для $n = 2$. А для произвольного натурального $n \geq 2$ утверждение следует из формулы

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_1(x, t) \mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt \text{ индукцией по } n. \blacksquare$$

Утверждение 3.3.

Пусть $\mathcal{K} \in C(T)$ и $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $y > x$. Для любого $n \geq 2$ при $y \leq x$ справедлива оценка $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq \frac{M^n(x - y)^{n-1}}{(n - 1)!}$.

Доказательство.

Формально при $y < x$ эта оценка верна и для $n = 1$:

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{M}{0!}. \text{ При } n = 2 \text{ оценка следует из утверждения 3.2:}$$

$$|\mathcal{K}_2(x, y)| \leq \int_y^x |\mathcal{K}(x, t)| |\mathcal{K}(t, y)| dt \leq \frac{M^2(x - y)}{1!}.$$

Теперь, пользуясь утверждением 3.2 при $n > 2$, индукцией по n получаем требуемую оценку при всех натуральных $n \geq 2$. Шаг индукции:

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_n(x, y)| &= \left| \int_y^x \mathcal{K}_1(x, t) \mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt \right| \leq \int_y^x |\mathcal{K}_1(x, t)| |\mathcal{K}_{n-1}(t, y)| dt \leq \\ &\leq M \cdot \frac{M^{n-1}}{(n-2)!} \int_y^x (t - y)^{n-2} dt = \frac{M^n}{(n-2)!} \cdot \frac{(x - y)^{n-1}}{(n-1)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Следствие 3.1.

Если $\mathcal{K} \in C(T)$ и $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $y > x$, то для всех $n \geq 2$ на диагонали $y = x$ квадрата S имеем $\mathcal{K}_n(x, x) = 0$. Поэтому при $n \geq 2$ все итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ непрерывны в замкнутом квадрате S . $\blacksquare$

Следствие 3.2.

В тех же предположениях о ядре $\mathcal{K}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ в замкнутом квадрате S справедлива оценка

$$|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq \frac{M^n(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!}. \quad (3.3)$$

3.2. Построение решения интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода методом последовательных приближений. Резольвента Фредгольма уравнения Вольтерры.

Для уравнения (3.1) сохраняются все факты теории Фредгольма. В чём же особенность этого случая?

Будем решать уравнение (3.1) в пространстве $C[a, b]$ методом последовательных приближений: выберем $\varphi_0(x) = f(x) \in C[a, b]$ и построим последовательность функций $\{\varphi_m\}$ по рекуррентной формуле

$$\varphi_m(x) = f(x) + \mu \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \varphi_{m-1}(y) dy; \quad (3.4)$$

коротко: $\varphi_m = f + \mu A \varphi_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$. По утверждению 3.1 все $\varphi_m \in C[a, b]$.

Теорема 3.1

Пусть в уравнении (3.1) ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом треугольнике T и $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $y > x$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда при **всех** $\mu \in \mathbb{C}$ непрерывное на $[a, b]$ решение $\varphi(x)$ уравнения (3.1) существует, непрерывное решение единственно, последовательные приближения $\varphi_m(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходятся к $\varphi(x)$ при $m \rightarrow +\infty$.

Доказательство.

Как и в доказательстве теоремы 2.5 имеем $\varphi_m = f + \mu A \varphi_{m-1} = f + \mu A f + \mu^2 A^2 f + \dots + \mu^m A^m f$, т.е. функция $\varphi_m(x)$ является m -ой частичной суммой ряда Неймана:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n (A^n f)(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy. \quad (3.5)$$

Оценим общий член этого функционального ряда при $n \geq 1$, пользуясь следствием 3.2:

$$\left| \mu^n \int_a^b \mathcal{K}_n(x, y) f(y) dy \right| \leq |\mu|^n \cdot \frac{M^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot M_f (b-a),$$

где $M_f = \max_{a \leq y \leq b} |f(y)| = \|f\|_{C[a, b]}$. Поэтому числовой ряд

$$M_f \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu|^n M^n (b-a)^n}{(n-1)!} \right) \quad (3.6)$$

мажорирует функциональный ряд (3.5). По признаку Даламбера числовой ряд (3.6) сходится при **всех** $\mu \in \mathbb{C}$. Отсюда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд Неймана (3.5) сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$ при **всех** $\mu \in \mathbb{C}$.

Все члены функционального ряда (3.5) суть непрерывные на $[a, b]$ функции. Действительно, по предположению $f \in C[a, b]$, тогда $Af \in C[a, b]$ по утверждению 3.1; по следствию 3.1 при $n \geq 2$ все ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ непрерывны в замкнутом квадрате S , поэтому $A^n f \in C[a, b]$. Ряд (3.5) сходится равномерно. Поэтому и его сумма — непрерывная

функция $\varphi(x)$. Итак, $\{\varphi_m\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi \in C[a, b]$. Тогда в формуле (3.4) можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$, вычисляя предел под знаком интеграла:

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy, \quad a \leq x \leq b$$

(докажите этот предельный переход как в теореме 2.5). Таким образом, $\varphi(x)$ — решение интегрального уравнения (3.1).

Докажем, что других непрерывных решений у уравнения (3.1) нет. Допустим, что ещё функция $\theta(x)$ является непрерывным решением уравнения (3.1) на $[a, b]$. Тогда функция $\omega(x) = \varphi(x) - \theta(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\omega(x) = \mu \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy. \quad (3.7)$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|\omega(x)| \leq |\mu| M \max_{a \leq y \leq b} |\omega(y)| \cdot (x - a). \quad (3.8)$$

Но тогда из (3.7) в силу (3.8) следует оценка

$$|\omega(x)| \leq |\mu|^2 M^2 \|\omega\|_{C[a, b]} \cdot \int_a^x (y - a) dy, \text{ и вообще:}$$

$|\omega(x)| \leq |\mu|^n M^n \|\omega\|_{C[a, b]} \cdot \frac{(x - a)^n}{n!}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ при всех $x \in [a, b]$. Отсюда

$\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)| = \|\omega\|_{C[a, b]} \leq \frac{1}{n!} \cdot |\mu|^n M^n (b - a)^n \|\omega\|_{C[a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому $\|\omega\|_{C[a, b]} = 0$, т.е. $\omega(x) \equiv 0$. ■

Следствие 3.3

Интегральный оператор Вольтерры не имеет характеристических чисел. ■

Замечание 3.1.

Доказанную в теореме 3.1 сходимость ряда Неймана (3.5) называют факториальной сходимостью. Именно она определяет отличие теоремы 3.1 от теоремы 2.5: для оператора Вольтерры ряд Неймана сходится при всех $\mu \in \mathbb{C}$. Поскольку все значения μ оказываются правильными, параметр μ в уравнение (3.1) часто вовсе не вводят. ■

Замечание 3.2.

Мажоранту (3.6) можно уточнить. Для этого учтём, что

$$(A^n f)(x) = [A(A^{n-1} f)](x) = \int_a^x \mathcal{K}(x, y) [(A^{n-1} f)(y)] dy.$$

Тогда справедливы оценки

$$|f(x)| \leq M_f; |(Af)(x)| \leq \int_a^x |\mathcal{K}(x, y)| |f(y)| dy \leq M M_f(x - a);$$

$$|(A^2 f)(x)| = \left| \int_a^x \mathcal{K}(x, y) [(Af)(y)] dy \right| \leq \int_a^x |\mathcal{K}(x, y)| |(Af)(y)| dy \leq \\ \leq M^2 M_f \int_a^x (y - a) dy = M_f \cdot \frac{M^2 (x - a)^2}{2};$$

и вообще, индукцией по n получаем $|(A^n f)(x)| \leq M_f \cdot \frac{M^n (x - a)^n}{n!}$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому ряд Неймана (3.5) можно мажорировать числовым рядом $M_f \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu|^n M^n (b - a)^n}{n!}\right) = M_f \exp\{|\mu| M(b - a)\}$,

и для решения φ уравнения (3.1) выполнена оценка

$$\|\varphi\|_{C[a, b]} \leq M_f \exp\{|\mu| M(b - a)\}. \quad (3.9)$$

■

Построим резольвенту Фредгольма Γ ядра $\mathcal{K}$, удовлетворяющего предположениям теоремы 3.1 (для этого в уравнении (3.1) параметр μ надо сохранить). В силу следствия 3.2 функциональный ряд

$$\Gamma(x, y; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \mathcal{K}_n(x, y) \quad (3.10)$$

сходится абсолютно и равномерно на S при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$, т.е. резольвента интегрального оператора Вольтерры является целой аналитической функцией параметра μ . При $y > x$ из утверждения 3.2 следует $\Gamma(x, y; \mu) = 0$. Поэтому интегральное представление (2.33) решения φ уравнения (3.1) имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^x \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy. \quad (3.11)$$

При любом фиксированном μ резольвента является непрерывной функцией переменных x, y в замкнутом треугольнике T ; отсюда и из (3.11) снова видно, что если $f \in C[a, b]$, то и решение $\varphi \in C[a, b]$.

Замечание 3.3

В условиях теоремы 3.1 интегральный оператор Вольтерры A действует из пространства $C[a, b]$ в $C[a, b]$ и является непрерывным (см. пример 1.1). Формула (3.11) означает, что при всех $\mu \in \mathbb{C}$ существует непрерывный оператор $(E - \mu A)^{-1}$, обратный к оператору $E - \mu A$.

Пример 3.1.

Найдём непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \mu \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq b; \quad f \in C[0, b]. \quad (3.12)$$

Пользуясь утверждением 3.2, для ядра

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} e^{x-y}, & \text{если } 0 \leq y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x, \end{cases} \quad \text{вычислим итерированные ядра:}$$

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \begin{cases} \int_y^x e^{x-t} e^{t-y} dt, & 0 \leq y \leq x; \\ 0, & y > x \end{cases} = \begin{cases} (x-y)e^{x-y}, & 0 \leq y \leq x; \\ 0, & y > x; \end{cases}$$

и вообще при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \begin{cases} \int_y^x e^{x-t} \mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt, & 0 \leq y \leq x; \\ 0, & y > x \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} e^{x-y}, & 0 \leq y \leq x; \\ 0, & y > x. \end{cases}$$

Резольвента Фредгольма оператора $(A\varphi)(x) = \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy$ имеет вид

$$\Gamma(x, y; \mu) = \begin{cases} e^{x-y} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \cdot \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{(\mu+1)(x-y)}, & 0 \leq y \leq x; \\ 0, & y > x. \end{cases}$$

Поэтому по формуле (3.11) получаем решение:

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_0^x e^{(\mu+1)(x-y)} f(y) dy. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.12) можно решить по-другому, если предположить, что $f \in C^1[0, b]$. Тогда будем искать решения φ в классе функций $C^1[0, b]$, которые удовлетворяют условию $\varphi(0) = f(0)$ (это условие следует из (3.12) при $x = 0$). Продифференцируем по x уравнение (3.12), пользуясь правилом Лейбница*. Тогда функция φ удовлетворяет задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\begin{cases} \varphi'(x) - (\mu+1)\varphi(x) = f'(x) - f(x), \\ \varphi(0) = f(0). \end{cases}$$

Решая эту задачу, снова получаем (3.13) (проверьте!).

* Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) — немецкий математик.

Заметьте, что уравнение (3.12) можно решать не на отрезке $[0, b]$, а на луче $[0, +\infty)$, если функция f определена на этом луче. Заметьте, что уравнение (3.12) имеет разностное ядро $\mathcal{K}$. ■

Замечание 3.4.

Интегральный оператор Вольтерры учитывает „предысторию“ процесса: для такого оператора A значение функции $(A\varphi)(x)$ в любой точке $x \geq a$ определяется только значениями функции $\varphi(y)$ при $y \leq x$. А формула (3.11) показывает, что решение уравнения (3.1) в каждой точке $x \geq a$ определяется только значениями функции $f(y)$ при $y \leq x$. Это означает, что если при $x \geq b$ свойства ядра $\mathcal{K}$ и свободного члена f сохраняются, то решение уравнения (3.1) можно продолжить правее точки b . Сначала можно построить решение φ на отрезке $a \leq x \leq b$, а для $x \geq b$ это уравнение можно представить в виде

$$\varphi(x) - \mu \int_b^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x),$$

где в правой части равенства записана уже известная функция переменной x .

Для уравнения Фредгольма (2.1) на отрезке построить его решение только на части этого отрезка, вообще говоря, невозможно. Решение φ такого уравнения в каждой точке x определяется значениями свободного члена на всём отрезке и значениями ядра на всём квадрате S . В этом смысле уравнение Фредгольма (2.1) аналогично системе линейных алгебраических уравнений с **полной** квадратной матрицей коэффициентов при неизвестных, а его частный случай, уравнение Вольтерры (3.1), аналогичен такой же системе с **треугольной** матрицей коэффициентов. ■

Замечание 3.5.

Выше предполагалось, что в уравнении (3.1) ядро $\mathcal{K} \in C(T)$, а свободный член $f \in C[a, b]$; решение φ искали в классе функций $C[a, b]$. Эти требования можно ослабить. Можно считать, что у оператора

Вольтерры ядро фредгольмово, т.е. $\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty$, что $f \in L_2[a, b]$, и искать решения φ в классе функций $L_2[a, b]$. В этом случае уравнение (3.1) имеет единственное решение $\varphi \in L_2[a, b]$, которое снова даётся формулой (3.11). Это решение можно получить методом последовательных приближений в виде предела сходящейся по норме пространства $L_2[a, b]$ последовательности функций (3.4). Резольвента Фредгольма по-прежнему определяется рядом (3.10) и является целой аналитической функцией параметра μ . Уравнение (3.1) и в этом случае не имеет характеристических чисел. ■

Контрпример 3.1.

Для изучения уравнения (3.1) нужны предположения о ядре $\mathcal{K}$. Свойства интегрального оператора Вольтерры могут из-

мениться, если его ядро не является фредгольмовым. Пусть $S = \{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y < +\infty\}$, $T = \{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq x\}$. Рассмотрим однородное уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \mu \int_0^x \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (3.14)$$

Если $\mathcal{K} \in C(T)$, то при любом $\mu \in \mathbb{C}$ уравнение (3.14) в классе непрерывных функций имеет единственное решение $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0$ на $0 \leq x < +\infty$.

Совсем иначе обстоит дело, если допускать ядра с неинтегрируемой особенностью. Пусть

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } 0 < y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x \end{cases} \quad (3.15)$$

(не имеет значения как определено ядро при $y = 0$). Для каждого $q > 0$ положим $\overset{\circ}{\varphi}(x) = x^q$. Каждая такая функция $\overset{\circ}{\varphi}$ является непрерывным решением уравнения (3.14) с ядром (3.15) при некотором μ ; найдём это значение μ . Из уравнения $x^q = \mu \int_0^x \frac{1}{x} \cdot y^q dy$ имеем

$$x^{q+1} = \mu \int_0^x y^q dy = \frac{\mu}{q+1} x^{q+1}, \text{ то есть } \mu = q+1. \text{ Итак, наряду с решением } \overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0 \text{ при каждом } \mu > 1 \text{ имеем ещё непрерывное решение } \overset{\circ}{\varphi}(x) = x^{\mu-1}. \blacksquare$$

Контрпример 3.2 (пример Урысона).

Для изучения уравнения (3.1) нужны предположения о классе функций, в котором ищется решение. В противном случае нельзя гарантировать единственность решения. Рассмотрим однородное уравнение

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.16)$$

с ядром

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} y \cdot \exp\left\{-\frac{(x^2-1)}{x^2}\right\}, & \text{если } 0 \leq y \leq x \cdot \exp\left\{+\frac{(x^2-1)}{x^2}\right\}; \\ x, & \text{если } x \cdot \exp\left\{+\frac{(x^2-1)}{x^2}\right\} \leq y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x. \end{cases} \quad (3.17)$$

В квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ядро (3.17) ограничено, поскольку $0 \leq \mathcal{K}(x, y) \leq x \leq 1$. В треугольнике $T = \{0 \leq x \leq 1,$

$0 \leq y \leq x$ это ядро непрерывно. По теореме 3.1 уравнение (3.16) имеет единственное решение $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0$ в классе непрерывных функций. Но это уравнение имеет ещё разрывные неинтегрируемые решения:

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \frac{c}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases} \text{ где } c — \text{произвольная постоянная, } c \neq 0.$$

В самом деле, при $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathcal{K}(x, y) \frac{c}{y} dy &= \int_0^x y \cdot \exp \left\{ + \frac{(x^2 - 1)}{x^2} \right\} \cdot \frac{c}{y} dy + \int_{x \cdot \exp \left\{ + \frac{(x^2 - 1)}{x^2} \right\}}^x x \cdot \frac{c}{y} dy = \\ &= cx - cx \cdot \ln \exp \left\{ + \frac{(x^2 - 1)}{x^2} \right\} = \frac{c}{x}. \blacksquare \end{aligned}$$

В связи с изучением уравнения (3.1) нет необходимости возвращаться к свойствам резольвенты Фредгольма $\Gamma(x, y; \mu)$, доказанным в разделе 2.7, поскольку Γ является целой аналитической функцией параметра μ . Заслуживает внимания лишь следующий вариант уравнения (2.79), которому удовлетворяет резольвента.

Свойство 3.1.

Пусть в уравнении (3.1) ядро $\mathcal{K} \in C(T)$ и $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $y > x$; пусть $f \in C[a, b]$. Тогда при любом значении $\mu \in \mathbb{C}$ резольвента Γ ядра $\mathcal{K}$ удовлетворяет в квадрате S уравнению

$$\Gamma(x, y; \mu) = \mathcal{K}(x, y) + \mu \int_y^x \mathcal{K}(x, t) \Gamma(t, y; \mu) dt. \quad (3.18)$$

Доказательство.

При произвольном фиксированном значении $\mu \neq 0$ подставим в уравнение (3.1) с непрерывным свободным членом f решение этого уравнения, записанное по формуле (3.11). Тогда получим тождество на отрезке $a \leq x \leq b$:

$$f(x) + \mu \int_a^x \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy - \mu \int_a^x \mathcal{K}(x, y) f(y) dy - \mu \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \left(\mu \int_a^y \Gamma(y, t; \mu) f(t) dt \right) dy \equiv f(x).$$

После сокращения $f(x)$ разделим тождество на μ и изменим порядок интегрирования в повторном интеграле. Тождество примет вид

$$\int_a^x \left[\Gamma(x, y; \mu) - \mathcal{K}(x, y) - \mu \int_y^x \mathcal{K}(x, t) \Gamma(t, y; \mu) dt \right] f(y) dy \equiv 0, \quad (3.19)$$

$a \leq x \leq b$; оно справедливо для любой непрерывной функции f . Выражение в квадратных скобках в (3.19) непрерывно в замкнутом квадрате S и равно нулю при $y > x$. В самом деле, в силу формулы (3.10) и

следствия 3.1 разность $\Gamma(x, y; \mu) - \mathcal{K}(x, y)$ непрерывна в S , а по утверждению 3.2 при $y > x$ эта разность равна нулю. Поэтому в тождестве (3.19) внешний интеграл можно записать в пределах от a до b . Тогда по основной лемме вариационного исчисления из (3.19) следует уравнение (3.18). ■

3.3. Примеры решений уравнений Вольтерры.

Пример 3.2.

Методом последовательных приближений найдём непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) + \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy = x, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (3.20)$$

В качестве начального приближения $\varphi_0(x)$ можно выбрать любую непрерывную функцию, не обязательно $\varphi_0(x) = x$ (см. задачу 2.3).

Выберем $\varphi_0(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_1(x) = x$; $\varphi_2(x) = x - \int_0^x (x-y)ydy = x - \frac{x^3}{6}$;

$\varphi_3(x) = x - \int_0^x (x-y)\left(y - \frac{y^3}{6}\right)dy = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$; и вообще:

$$\varphi_m(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

При $m \rightarrow +\infty$ получаем решение уравнения (3.20): $\varphi(x) = \sin x$ (проверьте, подставив в (3.20)). ■

При выполнении весьма специальных предположений к уравнению вида (3.1) можно свести интегральное уравнение Вольтерры 1-го рода:

$$\int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad f(a) = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (3.21)$$

Пусть при $a \leq x \leq b$ и $a \leq y \leq x$ функция $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x}$. Пусть существует непрерывная производная функции $f(x)$. Продифференцируем уравнение (3.21) по x :

$$\mathcal{K}(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi(y)dy = f'(x). \quad (3.22)$$

Если при всех x выполнено $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$, то, разделив на $\mathcal{K}(x, x)$,

получаем уравнение 2-го рода

$$\varphi(x) + \int_a^x Q(x, y)\varphi(y)dy = \frac{f'(x)}{\mathcal{K}(x, x)} \quad (3.23)$$

с ядром $Q(x, y) = \frac{1}{\mathcal{K}(x, x)} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x}$, непрерывным в треугольнике T , и с непрерывным свободным членом. Обратно: если $f(a) = 0$, то непрерывное решение уравнения (3.23) удовлетворяет уравнению (3.21). В самом деле: равенство (3.23) означает, что $\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy \right) = f'(x)$, то есть $\int_a^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x) + c$, где $c = \text{const}$; из условия $f(a) = 0$ следует $c = 0$. При сформулированных требованиях к функциям $\mathcal{K}$ и f уравнения (3.21) и (3.23) равносильны. Поэтому в силу теоремы 3.1 для уравнения (3.23) и уравнение (3.21) имеет единственное непрерывное решение; его можно найти, решая (3.23), например, методом последовательных приближений.

Если $\mathcal{K}(x, x) \equiv 0$, то уравнение (3.22) является уравнением 1-го рода. При выполнении для (3.22) условий, аналогичных сформулированным для уравнения (3.21), можно продифференцировать уравнение (3.22).

Если же $\mathcal{K}(x, x) \not\equiv 0$, но $\mathcal{K}(x_0, x_0) = 0$ хотя бы в одной точке x_0 , то (3.22) является уравнением 3-го рода и требует более детального изучения.

В более общем случае, когда невозможно продифференцировать уравнение 1-го рода (3.21), задача нахождения его решения может оказаться некорректной.

Задача 3.1.

Пусть известно, что уравнение (3.21) имеет непрерывное решение $\varphi(x)$; тогда функция $\theta(y) = \int_a^y \varphi(t)dt$ имеет непрерывную производную. Пусть в треугольнике T функция $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial y}$, причём при всех x выполнено $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $f(a) = 0$. Вычисляя интеграл $\int_a^x \mathcal{K}(x, y)d\theta(y)$ по частям, сведите уравнение (3.21) к уравнению 2-го рода относительно функции θ . Записывая решение θ этого уравнения по формуле (3.11), докажите, что для существования непрерывного решения φ уравнения (3.21) функция f должна иметь непрерывную производную. ■

Уравнение Вольтерры 2-го рода можно свести к уравнению 1-го

рода. Пусть в уравнении

$$\varphi(t) - \int_a^t \mathcal{K}(t, y) \varphi(y) dy = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (3.24)$$

ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в треугольнике T , а свободный член f непрерывен на $[a, b]$. Проинтегрируем (3.24):

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(t) dt &= \int_a^x \left(\int_a^t \mathcal{K}(t, y) \varphi(y) dy \right) dt + \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x \left(\int_y^x \mathcal{K}(t, y) dt \right) \varphi(y) dy + F(x), \end{aligned}$$

где $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Получили уравнение 1-го рода

$\int_a^x \left[1 - \int_y^x \mathcal{K}(t, y) dt \right] \varphi(y) dy = F(x)$; в нём функция F обладает большей гладкостью, чем f , — в этом может быть практический смысл перехода от уравнения (3.24) к уравнению 1-го рода.

Рассмотрим уравнение (3.1) с вырожденным ядром, т.е. с ядром вида

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(y), & \text{если } a \leq x \leq b, a \leq y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x. \end{cases} \quad (3.25)$$

Здесь все $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(y)$ — непрерывные функции, причём система функций $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^m$ линейно независима на $a \leq x \leq b$, а система функций $\{\beta_i(y)\}_{i=1}^m$ линейно независима на $a \leq y \leq x$ при каждом x . Будем искать непрерывное решение φ уравнения (3.1) при $\mu = 1$. Это уравнение с ядром (3.25) имеет вид $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) p_i(x) + f(x)$, где

$$p_i(x) = \int_a^x \beta_i(y) \varphi(y) dy, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.26)$$

Продифференцируем (3.26) и учтём исходное уравнение:

$$p'_i(x) = \beta_i(x) \varphi(x) = \beta_i(x) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) p_j(x) + f(x) \right), \quad i = 1, \dots, m.$$

Кроме того, имеем начальные условия $p_i(a) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Получили задачу Коши для системы m обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно функций $p_i(x)$. Эта задача равносильна исходному интегральному уравнению с вырожденным ядром (3.25).

Пример 3.3.

Найдём непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^x xy\varphi(y)dy = x, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (3.27)$$

Ядро этого уравнения вырожденное, поэтому (3.27) имеет вид $\varphi(x) = xp(x) + x$, где $p(x) = \int_0^x y\varphi(y)dy$. Дифференцируя $p(x)$, приходим к задаче Коши

$$p'(x) = x^2p(x) + x^2, \quad p(0) = 0.$$

Её решение: $p(x) = e^{\frac{x^3}{3}} - 1$ (проверьте!). Отсюда $\varphi(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}$. ■

Пример 3.4.

Непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = \sin x, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (3.28)$$

можно найти, решая его как уравнение с вырожденным ядром; при этом получим задачу Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (решите самостоятельно!).

Но можно рассуждать по-другому. Очевидно, что $\varphi(0) = 0$. По теореме 3.1 уравнение (3.28) имеет единственное непрерывное решение. Попробуем найти его в классе $C^2(0 \leq x < +\infty)$, т.е. предположим, что уравнение (3.28) можно два раза продифференцировать. Тогда

$$\varphi'(x) = \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy + \cos x, \quad \varphi'(0) = 1;$$

$\varphi''(x) = -\int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy + \varphi(x) - \sin x = 0$ — в силу исходного уравнения (3.28). Получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\varphi''(x) = 0, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \varphi(0) = 0.$$

Её решение: $\varphi(x) = x$. ■

Как видно из примеров 3.3 и 3.4, интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода с „хорошими“ функциями $\mathcal{K}$ и f можно свести к задаче Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Покажем, что такая задача Коши в свою очередь сводится к интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода. Для этого докажем сначала известную из курса математического анализа формулу для повторного интеграла.

Лемма 3.1.

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна при $a \leq x \leq b$. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ на отрезке $a \leq x \leq b$ выполнено равенство

$$\int_a^x dy_{i-1} \int_a^{y_{i-1}} dy_{i-2} \dots \int_a^{y_1} \varphi(y) dy = \frac{1}{(i-1)!} \int_a^x (x-y)^{i-1} \varphi(y) dy. \quad (3.29)$$

Доказательство проведём индукцией по i . Обозначим через $\mathcal{I}_i(x)$ правую часть формулы (3.29). При $i = 1$ формула (3.29) является тавтологией. Проверим эту формулу при $i = 2$:

$$\int_a^x dy_1 \int_a^{y_1} \varphi(y) dy = \int_a^x \left(\varphi(y) \int_y^x dy_1 \right) dy = \int_a^x (x-y) \varphi(y) dy = \mathcal{I}_1(x).$$

Предполагая справедливость формулы (3.29) при некотором $i \in \mathbb{N}$, докажем, что она выполнена и для $i + 1$. Для этого продифференцируем $\mathcal{I}_{i+1}(x)$ по правилу Лейбница:

$$\mathcal{I}'_{i+1}(x) = \frac{1}{i!} \int_a^x i \cdot (x-y)^{i-1} \cdot \varphi(y) dy = \mathcal{I}_i(x)$$

и учтём, что $\mathcal{I}_i(a) = 0$. Отсюда $\mathcal{I}_{i+1}(x) = \int_a^x \mathcal{I}_i(y_i) dy_i$; подставляя вместо $\mathcal{I}_i$ его выражение в виде повторного интеграла по (3.29), получаем формулу (3.29) при $i + 1$. ■

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения n -го порядка относительно функции $\theta \in C^n$:

$$\begin{cases} \theta^{(n)}(x) + \delta_1(x)\theta^{(n-1)}(x) + \dots + \delta_n(x)\theta(x) = \gamma(x), & a \leq x \leq b; \\ \theta(a) = \theta_0, \theta'(a) = \theta_1, \dots, \theta^{(n-1)}(a) = \theta_{n-1}; \end{cases} \quad (3.30)$$

все коэффициенты $\delta_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, и функцию $\gamma(x)$ предполагаем непрерывными. Функцию $\theta^{(n)}(x)$ обозначим через $\varphi(x)$, тогда $\theta^{(n-1)}(x) = \int_a^x \varphi(y) dy + \theta_{n-1}$. Пользуясь формулой (3.29), получаем

$$\begin{aligned} \theta^{(n-2)}(x) &= \int_a^x \theta^{(n-1)}(y_1) dy_1 + \theta_{n-2} = \int_a^x dy_1 \int_a^{y_1} \varphi(y) dy + \theta_{n-1} \cdot (x-a) + \theta_{n-2} = \\ &= \int_a^x (x-y) \varphi(y) dy + \theta_{n-1} \cdot (x-a) + \theta_{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta^{(n-3)}(x) &= \int_a^x \theta^{(n-2)}(y_2) dy_2 + \theta_{n-3} = \int_a^x dy_2 \int_a^{y_2} dy_1 \int_a^{y_1} \varphi(y) dy + \\
&\quad + \theta_{n-1} \cdot \int_a^x (y_2 - a) dy_2 + \theta_{n-2} \cdot (x - a) + \theta_{n-3} = \\
&= \frac{1}{2!} \int_a^x (x - y)^2 \varphi(y) dy + \theta_{n-1} \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + \theta_{n-2} \cdot (x - a) + \theta_{n-3},
\end{aligned}$$

и т.д.; наконец,

$$\theta(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} \varphi(y) dy + \theta_{n-1} \cdot \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \theta_1 \cdot (x-a) + \theta_0.$$

Подставляя найденные выражения функций $\theta^{(n)}(x), \dots, \theta(x)$ в уравнение (3.30), приходим к линейному интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) + \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.31)$$

в котором

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i(x) \cdot \frac{(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}, & \text{если } a \leq y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \gamma(x) - \theta_{n-1} \cdot \delta_1(x) - (\theta_{n-1} \cdot (x-a) + \theta_{n-2}) \cdot \delta_2(x) - \dots - \\
&\quad - \left(\theta_{n-1} \cdot \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \theta_1 \cdot (x-a) + \theta_0 \right) \cdot \delta_n(x).
\end{aligned}$$

Существование и единственность решения $\theta(x)$ задачи Коши для уравнения (3.30) следует из теоремы 3.1 для интегрального уравнения относительно $\varphi(x)$.

Задача 3.2.

Пусть в уравнении (3.30) все коэффициенты δ_i постоянны. Каким будет ядро $\mathcal{K}$ уравнения (3.31)? ■

3.4. Уравнение Вольтерры с непрерывным ядром, зависящим от разности аргументов. Применение преобразования Лапласа для его решения.

Пусть $\mathcal{K}(x)$ и $f(x)$ — заданные при $0 \leq x < +\infty$ непрерывные и ограниченные функции: $M = \sup_{0 \leq x < +\infty} |\mathcal{K}(x)| < \infty$,

$M_f = \sup_{0 \leq x < +\infty} |f(x)| < \infty$. Будем искать непрерывное решение φ уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-y)\varphi(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (3.32)$$

Из оценки (3.9) имеем для решения φ этого уравнения неравенство $|\varphi(x)| \leq M_f \cdot e^{Mx}$ при всех $x \geq 0$. При таких условиях определены односторонние преобразования Лапласа функций $\mathcal{K}(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$:

$$L(p) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x)e^{-px}dx, \quad F(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx, \quad \Phi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)e^{-px}dx,$$

где p — комплексная переменная. Коротко эти равенства записывают так:

$$L(p) \doteq \mathcal{K}(x), \quad F(p) \doteq f(x), \quad \Phi(p) \doteq \varphi(x).$$

Функции $\mathcal{K}(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ при выполнении некоторых дополнительных требований называют оригиналами, а функции $L(p)$, $F(p)$, $\Phi(p)$ — их изображениями.

Интеграл $\int_0^x \mathcal{K}(x-y)\varphi(y)dy$ называют свёрткой функций $\mathcal{K}$ и f . Изображением свёртки является произведение изображений: $L(p) \cdot \Phi(p) \doteq \int_0^x \mathcal{K}(x-y)\varphi(y)dy$. Поэтому в пространстве изображений уравнению (3.32) соответствует уравнение

$$\Phi(p) = L(p) \cdot \Phi(p) + F(p). \quad (3.33)$$

Отсюда $\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}$, и чтобы решить исходное уравнение (3.32), надо найти оригинал функции $\Phi(p)$. При некоторых дополнительных условиях оригинал однозначно восстанавливается по своему изображению.

Напомним нужные здесь понятия и теоремы из теории функций комплексной переменной. Определённую при всех действительных x функцию $\varphi(x)$ называют оригиналом, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1. $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера во всех точках x , кроме, быть может, изолированных точек, в которых допускаются даже разрывы 1-го рода;

2. $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$;

3. $|\varphi(x)| < Ne^{Mx}$ при всех x (здесь $N = \text{const} > 0$, $M = \text{const} \geq 0$, постоянную M называют показателем степени

роста функции φ).

Как видно из первого условия, применение преобразования Лапласа для построения решения φ уравнения (3.32) предполагает, что кроме непрерывности искомой функции к ней предъявляется большее требование. Напомним, что функция φ удовлетворяет условию Гёльдера в точке x , если существуют такие определяемые этой точкой постоянные $C > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $h_0 > 0$, что при всех h , удовлетворяющих условию $|h| < h_0$ выполнено неравенство $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq C|h|^\alpha$. Условию 1. удовлетворяют, например, кусочно гладкие функции.

Теорема 3.2.

Пусть функция $\varphi(x)$ является оригиналом. Пусть $\Phi(p)$ является изображением функции $\varphi(x)$. Тогда в любой точке x , в которой φ удовлетворяет условию Гёльдера, справедлива формула Меллина:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} V.p. \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{px} \Phi(p) dp, \quad (*)$$

где $\operatorname{Re} p = h > M$ (здесь интеграл берётся вдоль **любой** прямой $\operatorname{Re} p = h > M$ в комплексной p -плоскости и понимается в смысле главного значения).■

Имеется условие, достаточное для того, чтобы функция $\Phi(p)$ служила изображением некоторого оригинала.

Теорема 3.3.

Пусть функция $\Phi(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > M$. Пусть в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq h > M$ функция $\Phi(p)$ при $|p| \rightarrow +\infty$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$. Пусть в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq h > M$ интеграл

$\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \Phi(p) dp$ абсолютно сходится.

Тогда функция $\Phi(p)$ при $\operatorname{Re} p > h$ является изображением функции $\varphi(x)$, определённой формулой (*).■

Доказательства теорем 3.2 и 3.3 см. в книгах [Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Гл. 8, §2], [Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Гл. 6, §1]. Соответствие „оригинал — изображение“ часто можно установить по таблицам.

Вернёмся к уравнению (3.32) и к формуле (3.11).

Утверждение 3.4.

Пусть ядро уравнения (3.1) зависит только от разности его аргументов (допуская вольность в обозначениях, запишем это в виде $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(x - y)$). Тогда и все итерированные ядра и резольвента зависят лишь от разности $x - y$.

Доказательство.

По утверждению 3.2 имеем

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \begin{cases} \int_y^x \mathcal{K}(x-t)\mathcal{K}(t-y)dt, & \text{если } y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x. \end{cases}$$

При $y \leq x$ в этом интеграле выполним замену переменной интегрирования: положим $\tau = t - y$. Тогда при $y \leq x$ интегрированное ядро $\mathcal{K}_2(x, y)$ зависит только от $x - y$: $\mathcal{K}_2(x, y) = \int_0^{x-y} \mathcal{K}(x-y-\tau)\mathcal{K}(\tau)d\tau$.

Индукцией по n получаем из утверждения 3.2, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \begin{cases} \int_y^x \mathcal{K}(x-t)\mathcal{K}_{n-1}(t-y)dt, & \text{если } y \leq x; \\ 0, & \text{если } y > x; \end{cases}$$

будет зависеть лишь от разности $x - y$ (для доказательства надо выполнить замену $\tau = t - y$). Из формулы (3.10) теперь следует $\Gamma(x, y; \mu) = \Gamma(x - y; \mu)$. ■

По утверждению 3.4 формула (3.11) для уравнения (3.32) принимает вид

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \Gamma(x-y; 1)f(y)dy. \quad (3.34)$$

Пусть функция $\Gamma(x; 1)$ является оригиналом, и $\Gamma(x; 1) \doteq G(p)$. Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (3.34):

$$\Phi(p) = F(p) + G(p) \cdot F(p). \quad (3.35)$$

С другой стороны, из (3.33) вытекает

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)} = F(p) + \frac{L(p)}{1 - L(p)} \cdot F(p). \quad (3.36)$$

Сравнивая (3.35) и (3.36), получаем

$$G(p) = \frac{L(p)}{1 - L(p)}. \quad (3.37)$$

Убедиться в том, что для заданного разностного ядра $\mathcal{K}$ функции $G(p)$ вида (3.37) действительно соответствует оригинал $\Gamma(x; 1)$ часто удаётся по теореме 3.3. Но в большинстве простых случаев достаточно воспользоваться таблицей „оригинал — изображение“. Найдя функцию $\Gamma(x; 1)$ по её изображению $G(p)$, получаем решение φ уравнения

(3.32) по формуле (3.34) для любой непрерывной и ограниченной функции f .

Пример 3.5.

Применяя преобразование Лапласа, найдём непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x < +\infty.$$

По таблице „оригинал — изображение“ найдём изображение $L(p)$ ядра $\mathcal{K}(x) = \sin x$: $L(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$. Тогда изображением $G(p)$ функции $\Gamma(x; 1)$ будет согласно формуле (3.37) функция $G(p) = \frac{1}{p^2}$. Снова по таблице находим $\frac{1}{p^2} \stackrel{\cdot}{=} x = \Gamma(x; 1)$. Отсюда $\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)f(y)dy$ (при $f(x) = \sin x$ сравните с примером 3.4). ■

Глава 4.

Линейные операторы в линейных нормированных пространствах (некоторые понятия функционального анализа).

4.1. Линейные ограниченные операторы.

Пусть Φ и Ψ — линейные пространства над одним и тем же полем чисел $\mathbb{P}$ (либо $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{P} = \mathbb{C}$; другие поля чисел здесь не рассматриваем). Отображение A , действующее из Φ в Ψ , принято называть оператором; его область определения — некоторое множество $Dom A \subseteq \Phi$. Пусть $Dom A$ является линейным многообразием в Φ . Оператор A называют однородным, если $A(\alpha\varphi) = \alpha A\varphi$ для всех $\varphi \in Dom A$ и всех чисел $\alpha \in \mathbb{P}$. Оператор A называют аддитивным, если $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2$ для всех $\varphi_1 \in Dom A$ и $\varphi_2 \in Dom A$. Аддитивный и однородный оператор называют линейным.

Задача 4.1.

Докажите, что для аддитивного оператора A выполнены равенства $A0 = 0$ и $A(-\varphi) = -A\varphi$. ■

Будем далее считать, что Φ и Ψ — нормированные пространства. В предыдущих главах рассматривались бесконечномерные линейные пространства $C[a, b]$, $\widetilde{L}_2[a, b]$, $L_2[a, b]$ с нормами

$$\|\varphi\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|, \quad \|\varphi\|_{L_2[a,b]} = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространства $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$ полные, пространство $\widetilde{L}_2[a, b]$ неполное (оно содержит только непрерывные функции). Пространство $L_2[a, b]$ евклидово: $\|\varphi\|_{L_2[a,b]}^2 = (\varphi, \varphi)_{L_2[a,b]}$. Пространство $C[a, b]$ не является евклидовым.

Задача 4.2.

Приведите пример двух непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций φ_1 и φ_2 , для которых не выполнено равенство параллелограмма, т.е. $\|\varphi_1 + \varphi_2\|_{C[a,b]}^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[a,b]}^2 \neq 2(\|\varphi_1\|_{C[a,b]}^2 + \|\varphi_2\|_{C[a,b]}^2)$. ■

Определение 4.1.

Полное линейное нормированное пространство называют банаховым* пространством. ■

Пространства $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$ банаховы.

Определение 4.2.

Полное евклидово бесконечномерное линейное пространство называют гильбертовым пространством. ■

Пространство $L_2[a, b]$ гильбертово.

*Банах Стефан (1892–1945) — польский математик.

Пространства $C[a, b]$ и $\widetilde{L}_2[a, b]$ имеют одно и то же множество всех своих элементов — все непрерывные на $[a, b]$ функции. Но нормы этих бесконечномерных пространств не являются эквивалентными: $\|\cdot\|_{\widetilde{L}_2}$ подчинена норме $\|\cdot\|_C$, но $\|\cdot\|_C$ не подчинена норме $\|\cdot\|_{\widetilde{L}_2}$ (докажите!).

Наличие норм в линейных пространствах Φ и Ψ позволяет ввести понятие непрерывности оператора.

Определение 4.3.

Оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ называют непрерывным в точке $\varphi_0 \in \text{Dom} A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\varphi \in \text{Dom} A$, удовлетворяющих неравенству $\|\varphi - \varphi_0\|_\Phi < \delta$, выполнено неравенство $\|A\varphi - A\varphi_0\|_\Psi < \varepsilon$. ■

Утверждение 4.1.

Пусть аддитивный оператор A непрерывен в некоторой точке $\varphi_0 \in \text{Dom} A$. Тогда этот оператор непрерывен в каждой точке множества $\text{Dom} A$. (Докажите самостоятельно!) ■

Определение 4.4.

Оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ называют линейным непрерывным, если $\text{Dom} A = \Phi$, оператор A линеен и непрерывен в каждой точке $\varphi \in \Phi$. ■

Определение 4.5.

Линейный оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ называют ограниченным, если $\text{Dom} A = \Phi$, и существует такое число C , что для всех $\varphi \in \Phi$ выполнено неравенство $\|A\varphi\|_\Psi \leq C\|\varphi\|_\Phi$. ■

Если A — ограниченный оператор, то образ всякого множества в Φ , ограниченного по норме $\|\cdot\|_\Phi$, будет множеством, ограниченным по норме $\|\cdot\|_\Psi$. Это свойство можно принять за определение ограниченного оператора (не обязательно линейного).

Утверждение 4.2.

Линейный оператор является непрерывным в том и только в том случае, если он ограничен.

Доказательство.

Необходимость. Пусть A — линейный непрерывный оператор; тогда по определению $\text{Dom} A = \Phi$. Предположим, что оператор A не является ограниченным, т.е. для любого числа $C > 0$ найдётся элемент $\varphi \in \Phi$, для которого будет выполнено неравенство $\|A\varphi\|_\Psi > C\|\varphi\|_\Phi$. Выберем последовательность положительных чисел $\{C_n\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = +\infty$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $\varphi_n \in \Phi$, для которого $\|A\varphi_n\|_\Psi > C_n\|\varphi_n\|_\Phi$. Построим последовательность элементов $\xi_n = \frac{\varphi_n}{C_n\|\varphi_n\|_\Phi}$. Очевидно, что $\|\xi_n\|_\Phi = \frac{1}{C_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, т.е.

$\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \in \Phi$. Но $\|A\xi_n\|_\Psi = \frac{\|A\varphi_n\|_\Psi}{C_n\|\varphi_n\|_\Phi} > 1$, т.е. последовательность элементов $A\xi_n$ не сходится к элементу $A0 = 0 \in \Psi$. Следовательно, оператор A не является непрерывным в точке $0 \in \Phi$ — противоречие.

Достаточность. Пусть аддитивный оператор A ограничен, т.е. $\|A\varphi\|_{\Psi} \leq C\|\varphi\|_{\Phi}$ для всех $\varphi \in \Phi$. Пусть последовательность элементов $\{\varphi_n\}$ сходится к элементу φ , т.е. $\|\varphi_n - \varphi\|_{\Phi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Тогда $\|A\varphi_n - A\varphi\|_{\Psi} = \|A(\varphi_n - \varphi)\|_{\Psi} \leq C\|\varphi_n - \varphi\|_{\Phi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, что означает сходимость последовательности $\{A\varphi_n\}$ к элементу $A\varphi$. ■

Множество всех линейных непрерывных операторов, действующих из Φ в Ψ , будем обозначать через $\mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$.

Из определения 4.5 видно, что для ограниченного линейного оператора A величина $\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|_{\Psi}}{\|\varphi\|_{\Phi}}$ конечна (точная верхняя грань берётся по всем $\varphi \in \Phi$, $\varphi \neq 0$). Эту величину называют нормой оператора: $\|A\|$.

Задача 4.3.

Для оператора $A \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$ докажите равенства:

$$\|A\| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A\varphi\|_{\Psi}}{\|\varphi\|_{\Phi}} = \sup_{\|\varphi\|_{\Phi} \leq 1} \|A\varphi\|_{\Psi} = \sup_{\|\varphi\|_{\Phi} = 1} \|A\varphi\|_{\Psi} = \inf_{\{C \mid \|A\varphi\|_{\Psi} \leq C\|\varphi\|_{\Phi}\}} C$$
(точная нижняя грань берётся по всем положительным C , для которых указанное неравенство выполнено при всех $\varphi \in \Phi$). ■

Задача 4.4.

Докажите, что если $A \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$ и $A \neq 0$, то $\|A\| > 0$. ■

В случае конечномерных пространств Φ и Ψ все линейные операторы, действующие из Φ в Ψ , ограничены. Но в бесконечномерных пространствах это не так. Свойства ограниченных и неограниченных операторов существенно различаются.

Пример 4.1.

Оператор A , заданный формулой $(A\varphi)(x) = \int_a^x \varphi(y)dy$, будем рассматривать как действующий из $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Очевидно, что $Dom A = C[a, b]$. Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции φ выполнены неравенства $\|A\varphi\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x \varphi(y)dy \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \int_a^x |\varphi(y)|dy \leq \max_{a \leq y \leq b} |\varphi(y)| \cdot \max_{a \leq x \leq b} \int_a^x dy = (b-a)\|\varphi\|_{C[a, b]}$. Этим доказана ограниченность оператора A . Найдём его норму. Ясно, что $\|A\| \leq b-a$. Но для функции $\varphi(x) \equiv 1$ указанные неравенства превращаются в равенство $\|A\varphi\|_{C[a, b]} = (b-a)\|\varphi\|_{C[a, b]} = (b-a)$. Поэтому $\|A\| = b-a$. ■

Пример 4.2.

Из примера 1.1 видно, что если ядро $K(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, то линейный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$ непрерывен в паре пространств $\Phi = C[a, b]$,

$\Psi = C[a, b]$. Поэтому в этой паре пространств он ограничен. Можно доказать, что $\|A\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)| dy$ (доказательство см. в книге [Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Краткий курс функционального анализа. Гл. 3, §2]). ■

Контрпример 4.1.

Пусть $\Phi = C[a, b]$, $\Psi = C[a, b]$, а линейный оператор A задан как $(A\varphi)(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$. Этот оператор определён не на всём пространстве Φ , т.к. $\text{Dom} A = C^1[a, b]$. В такой паре пространств Φ и Ψ оператор A не является непрерывным. Действительно, последовательность функций $\varphi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. $\{\varphi_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в $C[a, b]$. Но последовательность функций $(A\varphi_n)(x) = \cos(nx)$ не сходится при $n \rightarrow \infty$. ■

Пример 4.3.

Пусть $\Phi = C^1[a, b]$, $\Psi = C[a, b]$, а линейный оператор A задан как $(A\varphi)(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$. Теперь оператор A определён на всём пространстве Φ : $\text{Dom} A = C^1[a, b]$. В такой паре пространств Φ и Ψ оператор A ограничен. Действительно, $\|A\varphi\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)| \leq \|\varphi\|_{C^1[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)|$. Отсюда видно, что $\|A\| \leq 1$. Снова выберем последовательность функций $\varphi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$; тогда $(A\varphi_n)(x) = \cos(nx)$. При достаточно больших n будем иметь $\|A\varphi_n\|_{C[a, b]} = 1 \leq \|\varphi_n\|_{C^1[a, b]} = \frac{1}{n} + 1$. Это означает, что в неравенстве $\|A\varphi\|_{C[a, b]} \leq C\|\varphi\|_{C^1[a, b]}$ постоянную $C = 1$ уменьшить нельзя. Следовательно, $\|A\| = 1$. ■

Пример 4.4.

Пусть оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$ имеет фредгольмово ядро: $P^2 = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty$. Для любой функции $\varphi \in L_2[a, b]$ выполнено неравенство Коши–Буняковского в пространстве $L_2[a, b]$ (для функций, зависящих от y ; значение параметра x считается фиксированным):

$$|(A\varphi)(x)| \leq \left(\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Возведём обе части этого неравенства в квадрат, проинтегрируем по x

на отрезке $[a, b]$ и извлечём квадратный корень из обеих частей неравенства (см. замечание 2.8). Тогда получим $\|A\varphi\|_{L_2[a,b]} \leq P \cdot \|\varphi\|_{L_2[a,b]}$. Следовательно, если оператор A рассматривать как действующий из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$, то он ограничен, и $\|A\| \leq P$. ■

Пример 4.5.

Пусть оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$ задан ядром $\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{\frac{1}{2}}}$. Это ядро имеет особенность на диагонали $y = x$

квадрата $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, причём $P^2 = \int_a^b \int_a^b \frac{dx dy}{|x - y|} = +\infty$, т.е. ядро нефредгольмово. Для простоты рассуждений рассмотрим действие оператора A лишь на функции пространства $\widetilde{L}_2[a, b]$. При любой функции $\varphi \in \widetilde{L}_2[a, b]$ выполнено неравенство Коши–Буняковского в пространстве $L_2[a, b]$ (для функций, зависящих от y ; значение параметра x считаем фиксированным):

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(x)| &= \left| \int_a^b \frac{1}{|x - y|^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\varphi(y)}{|x - y|^{\frac{1}{4}}} dy \right| \leq \\ &\leq \left(\int_a^b \frac{dy}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b \frac{|\varphi(y)|^2}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dy}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} &= \int_a^x \frac{dy}{(x - y)^{\frac{1}{2}}} + \int_x^b \frac{dy}{(y - x)^{\frac{1}{2}}} = 2 \left((x - a)^{\frac{1}{2}} + (b - x)^{\frac{1}{2}} \right), \text{ поэто-} \\ \text{му } \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b \frac{dy}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} &= 4\sqrt{\frac{b - a}{2}} \quad (\text{максимум достигается при } x = \frac{a + b}{2}). \end{aligned}$$

Возводя обе части неравенства (4.1) в квадрат, получим $|(A\varphi)(x)|^2 \leq 4\sqrt{\frac{b - a}{2}} \int_a^b \frac{|\varphi(y)|^2}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} dy$. Проинтегрируем по x обе части последнего неравенства на отрезке $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b |(A\varphi)(x)|^2 dx &\leq 4\sqrt{\frac{b - a}{2}} \int_a^b \left(\int_a^b \frac{|\varphi(y)|^2}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} dy \right) dx = \\ &= 4\sqrt{\frac{b - a}{2}} \int_a^b |\varphi(y)|^2 \left(\int_a^b \frac{dx}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} \right) dy \leq 8(b - a) \|\varphi\|_{L_2[a,b]}^2. \end{aligned}$$

Это означает, что интегральный оператор A можно рассматривать как действующий из пространства $\widetilde{L_2[a, b]}$ в $L_2[a, b]$, и он ограничен в этой паре пространств: $\|A\| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{b-a}$.

Чтобы определить данный оператор A на всём пространстве $L_2[a, b]$, надо обосновать проведённые выше рассуждения, пользуясь свойствами интеграла Лебега. ■

4.2. Вполне непрерывные линейные операторы.

Если Φ и Ψ — **конечномерные** линейные нормированные пространства, то всякий линейный оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ является ограниченным. Это означает, что для любого множества Ω , ограниченного в Φ , его образ $A\Omega$ будет множеством, ограниченным в Ψ . Можно построить замыкание множества $A\Omega$, тогда получим замкнутое ограниченное множество $\overline{A\Omega}$ (черта означает операцию замыкания) в конечномерном пространстве Ψ . Напомним, что в конечномерном пространстве замкнутые ограниченные множества, и только они, являются компактными.

Определение 4.6.

Пусть Ψ — метрическое пространство. Множество Ξ в метрическом пространстве Ψ называют компактным, если из любой бесконечной последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества Ξ можно выделить подпоследовательность $\{\psi_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, которая сходится к некоторому элементу $\psi_0 \in \Xi$. ■

Согласно определению 4.6 всякое компактное множество замкнуто. Но может оказаться, что некоторое множество Ξ не является замкнутым, а его замыкание $\overline{\Xi}$ в пространстве Ψ компактно; в этом случае множество Ξ называют предкомпактным.

Если линейное нормированное пространство Ψ **бесконечномерно**, а множество $\Xi \subset \Psi$ ограничено по норме $\|\cdot\|_{\Psi}$ и замкнуто, то из этого ещё не следует, что Ξ является компактным множеством.

Пример 4.6.

Пусть $\Psi = L_2[a, b]$ и $\Xi = \{\psi \in \Psi \mid \|\psi\| \leq 1\}$ — единичный шар. Выберем какую-нибудь бесконечную ортонормированную систему элементов $\{\psi_n\}$ (например, тригонометрическую систему функций). Тогда для любых её элементов ψ_i и ψ_j , где $i \neq j$, имеем $\|\psi_i - \psi_j\|_{L_2[a, b]}^2 = (\psi_i - \psi_j, \psi_i - \psi_j) = 2$. Поэтому никакая подпоследовательность последовательности $\{\psi_n\}$ не является фундаментальной. Из принадлежащей множеству Ξ последовательности $\{\psi_n\}$ невозможно выделить сходящуюся подпоследовательность.

В бесконечномерном пространстве $L_2[a, b]$ единичный шар Ξ замкнут и ограничен, но не является компактным множеством. То же самое имеет место в любом бесконечномерном нормированном пространстве. ■

Для некоторых бесконечномерных нормированных пространств

имеются критерии компактности (или предкомпактности) их подмножеств. В пространстве $C[a, b]$ такой критерий известен как теорема Арцела.

Теорема 4.1 (теорема Арцела).

Множество Ξ функций, определённых и непрерывных на отрезке $[a, b]$, предкомпактно в пространстве $C[a, b]$ в том и только в том случае, если оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство см. в [24], Гл.2, §7. ■

Если Φ и Ψ — конечномерные пространства, то любой линейный оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ преобразует всякое ограниченное множество в предкомпактное. Пусть теперь Φ и Ψ — бесконечномерные нормированные пространства. Выделим класс операторов $A : \Phi \rightarrow \Psi$, которые обладают таким же свойством.

Определение 4.7.

Оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ (не обязательно линейный!) называют компактным, если он преобразует всякое множество Ω , ограниченное в пространстве Φ , во множество $A\Omega$, предкомпактное в пространстве Ψ . Если при этом оператор A непрерывен, то его называют вполне непрерывным. ■

В случае, когда оператор A линейный, понятия „компактный оператор“ и „вполне непрерывный оператор“ совпадают.

Утверждение 4.3.

Линейный вполне непрерывный оператор ограничен. (Докажите самостоятельно!) ■

Контрпример 4.2.

Φ — бесконечномерное линейное нормированное пространство, E — тождественный оператор: $E\varphi = \varphi$ для любого $\varphi \in \Phi$. Оператор E ограничен, но не является вполне непрерывным, поскольку единичный шар в Φ не является компактным множеством. ■

Пример 4.7.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, $M = \max_S |\mathcal{K}(x, y)|$; $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$.

Оператор A можно рассматривать как действующий из пространства $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Докажем, что в этой паре пространств он вполне непрерывен. Для используем теорему 4.1.

Пусть множество $\Omega \subset C[a, b]$ ограничено, т.е. существует такая постоянная N , что для всякой функции $\varphi \in \Omega$ выполнено неравенство $\|\varphi\|_{C[a, b]} < N$. Тогда для всякой функции $\varphi \in \Omega$ будет выполнено неравенство $\|A\varphi\|_{C[a, b]} \leq (b - a)MN$, т.е. функции множества $A\Omega$ равномерно ограничены.

Докажем равностепенную непрерывность множества функций $A\Omega$. Для любой функции $\psi \in A\Omega$ (т.е. для функции вида $\psi = A\varphi$, где

$$\begin{aligned} \varphi \in \Omega) \text{ имеем } |\psi(x_1) - \psi(x_2)| &= \left| \int_a^b \mathcal{K}(x_1, y) \varphi(y) dy - \int_a^b \mathcal{K}(x_2, y) \varphi(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| \cdot |\varphi(y)| dy < N \cdot \int_a^b |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy. \end{aligned}$$

Функция $\mathcal{K}(x, y)$ равномерно непрерывна в квадрате S . Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых x_1 и x_2 из отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, и для любого $y \in [a, b]$ будет выполнено неравенство $|\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{N \cdot (b - a)}$. А вместе с этим последним нера-

венством будет выполнено и неравенство $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех функций $\psi \in A\Omega$

Итак, если множество Ω ограничено в $C[a, b]$, то множество $A\Omega$ равномерно ограничено (т.е. тоже ограничено в $C[a, b]$) и равностепенно непрерывно. Поэтому оператор A вполне непрерывен. ■

Замечание 4.1.

Пусть интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$ имеет фредгольмово ядро, т.е. $\mathcal{K} \in L_2(S)$. Такой оператор A можно рассматривать как действующий из пространства $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$, и в этой паре пространств он вполне непрерывен. ■

Пример 4.8.

Если $A \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$, и $\dim \text{Ran} A < \infty$, то оператор A вполне непрерывен. Действительно, ограниченный оператор A переводит всякое ограниченное множество $\Omega \subset \Phi$ в ограниченное множество $A\Omega \subset \text{Ran} A$. По теореме Больцано*-Вейерштрасса в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое ограниченное множество предкомпактно. Такой оператор A называют конечномерным.

Например, пусть интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$ имеет непрерывное вырожденное ядро; $\Phi = \Psi = C[a, b]$. Такой оператор вполне непрерывен. ■

Задача 4.5.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом треугольнике $T = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$ и равно нулю при $y > x$. Интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$ можно рассматривать как дей-

ствующий из пространства $C[a, b]$ в $C[a, b]$ (см. утверждение 3.1). Докажите, что в этой паре пространств оператор A вполне непрерывен. ■

Утверждение 4.4.

Пусть Φ — бесконечномерное банахово пространство. Пусть

* Больцано Бернард (1781–1848) — чешский математик.

A — линейный вполне непрерывный оператор, $A : \Phi \rightarrow \Phi$. Пусть $B \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Phi)$. Тогда операторы AB и BA являются вполне непрерывными.

Доказательство.

Оператор B преобразует всякое ограниченное множество Ω в ограниченное множество $B\Omega$. А оператор A преобразует $B\Omega$ в предкомпактное множество $A(B\Omega)$. Следовательно, оператор AB преобразует всякое ограниченное множество в предкомпактное, т.е. AB вполне непрерывен.

Аналогично доказывается, что оператор BA вполне непрерывен (докажите!). ■

Следствие 4.1.

Действующий в **бесконечномерном** банаховом пространстве линейный вполне непрерывный оператор не может иметь непрерывного обратного оператора.

Доказательство.

Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор, и пусть существует непрерывный обратный оператор A^{-1} . Тогда $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ — тождественный оператор. В бесконечномерном пространстве тождественный оператор не является вполне непрерывным. Противоречие! ■

Это простое следствие приводит к тому, что многие практически важные задачи, которые формулируются в виде уравнения $A\varphi = f$ (относительно φ) со вполне непрерывным оператором A , оказываются некорректно поставленными. Например, такой задачей может оказаться интегральное уравнение 1-го рода: $\int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy = f(x), a \leq x \leq b$.

В главах 2 и 3 изучались уравнения 2-го рода $(E - \mu A)\varphi = f$, где A — вполне непрерывный оператор. Вполне непрерывный оператор по своим свойствам близок к конечномерному оператору. Это и проявилось в свойствах изученных интегральных уравнений 2-го рода Фредгольма и Вольтерры. Их можно рассматривать и в других функциональных пространствах. Так интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy$ называют оператором Фредгольма, если он действует из некоторого функционального пространства Φ в Φ и вполне непрерывен. При этом в уравнении 2-го рода полагают, что свободный член f и искомая функция φ принадлежат пространству Φ ; это накладывает определённые требования на ядро $\mathcal{K}$. Оператор $A \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Phi)$ называют оператором Вольтерры, если он вполне непрерывен, и при любом значении $\mu \in \mathbb{C}$ существует непрерывный обратный оператор $(E - \mu A)^{-1}$ (ср. со следствием 3.3).

4.3. Сопряжённый оператор в гильбертовом пространстве.

Через H будем обозначать гильбертово пространство (над полем чисел $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) со скалярным произведением (φ, ψ) его элементов φ и ψ . Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий в H . Определим оператор, сопряжённый к A .

Определение 4.8.

Если $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$, то оператор A^* с областью определения $Dom A^* = H$, для которого $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi)$ при всех $\varphi \in H$ и $\psi \in H$, называют сопряжённым к оператору A . ■

Корректность определения 4.8 и основные свойства оператора A^* следуют из теоремы Ф.Рисса* об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Напомним, что линейным непрерывным на H функционалом F называют линейный непрерывный оператор, действующий из H в поле чисел $\mathbb{P}$, над которым задано пространство H ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{P} = \mathbb{C}$). Равносильная свойству непрерывности ограниченность линейного функционала означает, что существует такое число C , что для всех $\varphi \in Dom F$ выполнено неравенство $|F(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_H$.

Теорема 4.2 (теорема Ф.Рисса).

Пусть H — действительное или комплексное гильбертово пространство, (φ, ψ) — скалярное произведение его элементов. Пусть F — определённый всюду на H линейный непрерывный функционал. Тогда существует единственный элемент $\psi \in H$ такой, что при всех $\varphi \in H$ выполнено $F(\varphi) = (\varphi, \psi)$ и, кроме того, $\|F\| = \|\psi\|_H$.

Доказательство.

Обозначим через $Ker F = \{\varphi \in H \mid F(\varphi) = 0\}$ ядро функционала F . Оно является замкнутым подпространством в H : вследствие линейности функционала F его ядро есть линейное многообразие, а вследствие непрерывности F оно замкнуто. Если $Ker F = H$, т.е. $F(\varphi) \equiv 0$ на H , то положим $\psi = 0 \in H$; в этом случае утверждение теоремы очевидно.

Пусть $Ker F \neq H$. Тогда существует элемент $\theta \neq 0$, $\theta \perp Ker F$. При любом $\varphi \in H$ элемент $F(\varphi) \cdot \theta - F(\theta) \cdot \varphi$ принадлежит множеству $Ker F$, поскольку $F(F(\varphi) \cdot \theta - F(\theta) \cdot \varphi) = F(\varphi) \cdot F(\theta) - F(\theta) \cdot F(\varphi) = 0$. Следовательно, элементы θ и $F(\varphi) \cdot \theta - F(\theta) \cdot \varphi$ ортогональны: $(F(\varphi) \cdot \theta - F(\theta) \cdot \varphi, \theta) = 0$. Отсюда $F(\varphi) \cdot (\theta, \theta) - F(\theta) \cdot (\varphi, \theta) = 0$, т.е.

$$F(\varphi) = \left(\varphi, \overline{F(\theta)} \cdot \frac{\theta}{\|\theta\|_H^2} \right) \quad (\text{в случае действительного пространства } H$$

черту комплексного сопряжения над $F(\theta)$ в последнем равенстве можно не принимать во внимание). Положим $\psi = \overline{F(\theta)} \cdot \frac{\theta}{\|\theta\|_H^2}$, тогда для любого $\varphi \in H$ значение функционала F в точке φ равно $F(\varphi) = (\varphi, \psi)$.

* Рисс Фридьеш (1880–1956) — венгерский математик.

Докажем единственность полученного представления. Предположим, что для любого $\varphi \in H$ выполнено $F(\varphi) = (\varphi, \psi_1) = (\varphi, \psi_2)$. Тогда, выбирая $\varphi = \psi_1 - \psi_2$, получим $\|\psi_1 - \psi_2\|_H^2 = 0$, т.е. $\psi_1 = \psi_2$.

Докажем, что $\|F\| = \|\psi\|_H$. По неравенству Коши–Буняковского $|F(\varphi)| = |(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|_H \cdot \|\psi\|_H$, поэтому $\|F\| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{|F(\varphi)|}{\|\varphi\|_H} \leq \|\psi\|_H$.

При $\varphi = \psi$ имеем $\frac{|F(\psi)|}{\|\psi\|_H} = \frac{(\psi, \psi)}{\|\psi\|_H} = \|\psi\|_H$, поэтому $\|F\| = \|\psi\|_H$. ■

Фиксируем элемент $\psi \in H$ и рассмотрим функционал $F(\varphi) = (A\varphi, \psi)$, где $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$. Очевидно, что F — линейный функционал, а в силу неравенств $|F(\varphi)| = |(A\varphi, \psi)| \leq \|A\varphi\| \cdot \|\psi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ функционал F является ограниченным, причём

$$\|F\| \leq \|A\| \cdot \|\psi\|. \quad (4.2)$$

По теореме 4.2 существует такой элемент $\psi^* \in H$, что для всех $\varphi \in H$ выполнено $F(\varphi) = (\varphi, \psi^*)$, т.е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*)$. Элемент ψ^* определяется функционалом F однозначно, а функционал F однозначно определён выбором элемента ψ . Таким образом, получаем определённый на **всём** пространстве H оператор A^* , действующий по правилу $A^*\psi = \psi^*$, т.е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi)$ для всех $\varphi \in H$ и $\psi \in H$. Это и доказывает корректность определения 4.8 и единственность оператора A^* .

Утверждение 4.5.

Если A — линейный непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H , то сопряжённый к нему оператор A^* тоже является линейным и непрерывным, причём $\|A\| = \|A^*\|$.

Доказательство.

Выберем произвольные элементы ψ_1 и ψ_2 в H . При всех $\varphi \in H$ выполнены соотношения $(A\varphi, \psi_1) = (\varphi, A^*\psi_1)$ и $(A\varphi, \psi_2) = (\varphi, A^*\psi_2)$; складывая эти соотношения, получим $(A\varphi, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi, A^*\psi_1 + A^*\psi_2)$ для всех φ . Это означает, что $A^*(\psi_1 + \psi_2) = A^*\psi_1 + A^*\psi_2$, т.е. оператор A^* аддитивен.

Докажем однородность оператора A^* : для всех φ и ψ выполнено $(A\varphi, \alpha\psi) = \bar{\alpha} \cdot (A\varphi, \psi) = \bar{\alpha} \cdot (\varphi, A^*\psi) = (\varphi, \alpha A^*\psi)$, т.е. $A^*(\alpha\psi) = \alpha A^*\psi$ (черту комплексного сопряжения над α в случае действительного пространства H можно не учитывать).

Для функционала $F(\varphi) = (\varphi, \psi^*)$, с помощью которого был определён оператор A^* , имеем $\|F\| = \|\psi^*\|_H$ по теореме 4.2. Тогда по неравенству (4.2) получаем $\|A^*\psi\| = \|\psi^*\| \leq \|A\| \cdot \|\psi\|$, т.е. A^* — ограниченный оператор, причём

$$\|A^*\| \leq \|A\|. \quad (4.3)$$

Докажем обратное неравенство. Рассмотрим оператор $A^{**} = (A^*)^*$. Для всех $\varphi, \psi \in H$ выполнены равенства $(A^*\varphi, \psi) = (\varphi, A^{**}\psi)$ и

$(A^*\varphi, \psi) = \overline{(\psi, A^*\varphi)} = \overline{(A\psi, \varphi)} = (\varphi, A\psi)$, поэтому $(\varphi, A^{**}\psi) = (\varphi, A\psi)$, т.е. $A^{**}\psi = A\psi$ при любом $\psi \in H$. Это значит, что операторы A и A^{**} совпадают. Заменим в неравенстве (4.3) оператор A на A^* , тогда получим $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$. Отсюда $\|A^*\| = \|A\|$. ■

Утверждение 4.6.

Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Оператор A является вполне непрерывным в том и только в том случае, если A^* вполне непрерывен.

Доказательство.

Поскольку $A = (A^*)^*$, достаточно доказать, что оператор A^* вполне непрерывен, если этим свойством обладает оператор A .

Докажем сначала, что если $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$, и если оператор A^*A вполне непрерывен, то и оператор A вполне непрерывен.

Пусть Ω — произвольное бесконечное ограниченное по норме пространства H множество: для всех $\varphi \in \Omega$ выполнено неравенство $\|\varphi\| < C$. Тогда любая бесконечная последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ элементов множества Ω переводится оператором A^*A в последовательность $\{A^*A\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, из которой можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\{A^*A\varphi_{n_i}\}_{i=1}^\infty$. Покажем, что тогда и последовательность $\{A\varphi_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ фундаментальна. Это следует из неравенств $\|A\varphi_{n_i} - A\varphi_{n_j}\|^2 = (A(\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j}), A(\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j})) = (A^*A(\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j}), (\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j})) \leq \|A^*A\varphi_{n_i} - A^*A\varphi_{n_j}\| \cdot \|\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j}\|$ и $\|\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j}\| \leq \|\varphi_{n_i}\| + \|\varphi_{n_j}\| < 2C$. В силу полноты пространства H последовательность $\{A\varphi_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ сходится. Это и означает, что оператор A вполне непрерывен.

Если оператор A вполне непрерывен, то по утверждению 4.4 вполне непрерывен и оператор AA^* (так как по утверждению 4.5 для непрерывного оператора A оператор A^* тоже непрерывен). Но $AA^* = (A^*)^*A^*$, и чтобы доказать, что A^* вполне непрерывен, остаётся применить только что доказанное утверждение. ■

4.4. Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве и некоторые их свойства. Теорема о существовании характеристического значения у ненулевого вполне непрерывного самосопряжённого линейного оператора.

Определение 4.9.

Линейный непрерывный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H и совпадающий с сопряжённым к нему оператором A^* , называют самосопряжённым. ■

Самосопряжённый оператор характеризуется равенством $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для всех элементов φ и ψ пространства H . Как и в случае конечномерного евклидова пространства, самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве играют особую роль; это объясняется прежде всего следующими их свойствами.

Утверждение 4.7.

Пусть A — самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H .

Для любого элемента $\varphi \in H$ скалярное произведение $(A\varphi, \varphi)$ является действительным числом.

Если число λ является собственным значением оператора A , то оно действительно.

Если λ_1 и λ_2 — различные собственные значения оператора A , то соответствующие им собственные векторы $\varphi_1 \in H$ и $\varphi_2 \in H$ ортогональны.

Доказательство.

$(A\varphi, \varphi) = \overline{(\varphi, A\varphi)} = \overline{(\varphi, A^*\varphi)} = \overline{(A\varphi, \varphi)}$, т.е. число $(A\varphi, \varphi)$ действительное.

Пусть λ — собственное значение оператора A , т.е. существует $\varphi \in H$, $\varphi \neq 0$, для которого $A\varphi = \lambda \cdot \varphi$. Тогда $(A\varphi, \varphi) = (\lambda\varphi, \varphi) = \lambda\|\varphi\|^2$. Числа $(A\varphi, \varphi)$ и $\|\varphi\|^2$ действительны, поэтому и число λ действительно.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, $\varphi_1 \neq 0$, $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$, $\varphi_2 \neq 0$. Тогда $(A\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_1 \cdot (\varphi_1, \varphi_2)$ и $(\varphi_1, A\varphi_2) = \overline{\lambda_2} \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_2 \cdot (\varphi_1, \varphi_2)$. В силу равенства $A = A^*$ имеем $(A\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, A^*\varphi_2) = (\varphi_1, A\varphi_2)$. Поэтому $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, следовательно, $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. ■

Утверждение 4.8. Если A — самосопряжённый линейный непрерывный оператор, то $\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)|$.

Доказательство.

Величину $\sup_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)|$ обозначим через C . При $\|\varphi\| = 1$ имеем по неравенству Коши–Буняковского $|(A\varphi, \varphi)| \leq \|A\varphi\| \cdot \|\varphi\| \leq \|A\|$, поэтому $C \leq \|A\|$.

Докажем неравенство $C \geq \|A\|$. Заметим, что любой элемент θ в гильбертовом пространстве H можно представить в виде $\theta = \|\theta\| \cdot \theta'$, где $\|\theta'\| = 1$ (если $\theta \neq 0$, то $\theta' = \frac{\theta}{\|\theta\|}$; если $\theta = 0$, то θ' — произвольный элемент, норма которого равна 1). Поэтому для любого $\theta \in H$ выполнено неравенство

$$(A\theta, \theta) = \|\theta\|^2 \cdot (A\theta', \theta') \leq C \cdot \|\theta\|^2. \quad (4.4)$$

Учитывая, что $(A\psi, \varphi) = (\psi, A\varphi) = \overline{(A\varphi, \psi)}$, поскольку $A^* = A$, запишем два равенства:

$$\begin{aligned} (A(\varphi + \psi), \varphi + \psi) &= (A\varphi, \varphi) + (A\varphi, \psi) + (A\psi, \varphi) + (A\psi, \psi) = \\ &= (A\varphi, \varphi) + (A\varphi, \psi) + \overline{(A\varphi, \psi)} + (A\psi, \psi), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} (A(\varphi - \psi), \varphi - \psi) &= (A\varphi, \varphi) - (A\varphi, \psi) - (A\psi, \varphi) + (A\psi, \psi) = \\ &= (A\varphi, \varphi) - (A\varphi, \psi) - \overline{(A\varphi, \psi)} + (A\psi, \psi). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Вычтем (4.6) из (4.5): $(A(\varphi+\psi), \varphi+\psi) - (A(\varphi-\psi), \varphi-\psi) = 4 \cdot \operatorname{Re}(A\varphi, \psi)$. Применяя неравенство (4.4) при $\theta = \varphi + \psi$ и при $\theta = \varphi - \psi$, получаем

$$|\operatorname{Re}(A\varphi, \psi)| \leq \frac{1}{4}C(\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2) = \frac{1}{2}C(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2) \quad (4.7)$$

в силу равенства параллелограмма для евклидовой нормы. Предполагая, что $A\varphi \neq 0$, положим $\psi = \frac{\|\varphi\|}{\|A\varphi\|} \cdot A\varphi$ в неравенстве (4.7). Тогда

$$\|\psi\| = \|\varphi\|, \text{ и получаем } \left| \operatorname{Re}\left(A\varphi, \frac{\|\varphi\|}{\|A\varphi\|} \cdot A\varphi\right) \right| = \frac{\|\varphi\|}{\|A\varphi\|} \|A\varphi\|^2 \leq C\|\varphi\|^2,$$

т.е. $\|A\varphi\| \leq C \cdot \|\varphi\|$. Это же неравенство верно и в случае $A\varphi = 0$. Следовательно, $\|A\| \leq C$. ■

Следствие 4.2.

Если A — самосопряжённый линейный непрерывный оператор, то

$$\|A\| = \max \left\{ \left| \sup_{\|\varphi\|=1} (A\varphi, \varphi) \right|, \left| \inf_{\|\varphi\|=1} (A\varphi, \varphi) \right| \right\}. \quad \blacksquare$$

Следствие 4.3.

Если A — самосопряжённый линейный непрерывный оператор, то для любого элемента $\varphi \in H$ действительное число $(A\varphi, \varphi)$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi\|^2 \cdot \inf_{\|\varphi\|=1} (A\varphi, \varphi) \leq (A\varphi, \varphi) \leq \|\varphi\|^2 \cdot \sup_{\|\varphi\|=1} (A\varphi, \varphi)$. ■

Известно, что всякий линейный оператор, действующий в конечномерном комплексном линейном пространстве, имеет хотя бы одно собственное значение. Для операторов, действующих в бесконечномерном пространстве это уже не обязательно; приведём примеры таких операторов.

Пример 4.9.

Пусть в квадрате $S = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \sin(n+1)x \cdot \sin ny$ интегрального оператора

$$(A\varphi)(x) = \int_0^{\pi} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy. \quad \text{Функциональный ряд, определяющий}$$

ядро $\mathcal{K}$, равномерно сходится на S ; ядро $\mathcal{K}$ непрерывно на S . Поэтому оператор A можно рассматривать как действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$. Этот оператор ограничен (см. пример 4.4). Очевидно, что $A^* \neq A$.

Если функция $\varphi \in L_2[0, \pi]$ и такова, что

$$(A\varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4.8)$$

то $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, поскольку $\mathcal{K}(0, y) = \mathcal{K}(\pi, y) = 0$. Рассмотрим ортогональную на отрезке $[0, \pi]$ систему функций $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Эта система полна во множестве функций из $L_2[0, \pi]$, обращающихся в нуль на

концах отрезка $[0, \pi]$. Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции φ по этой системе. Покажем, что для любого числа λ из (4.8) следует, что φ является нулевым элементом пространства $L_2[0, \pi]$.

При $\lambda = 0$ равенство (4.8) означает

$$(A\varphi)(x) = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \sin(n+1)x \cdot \sin ny \cdot \varphi(y) dy = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \sin(n+1)x \cdot \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin ny dy = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot b_n \cdot \sin(n+1)x = 0$$

при $0 \leq x \leq \pi$. Отсюда все $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. В силу полноты системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ функция φ является нулевым элементом в $L_2[0, \pi]$.

При $\lambda \neq 0$ равенство (4.8) означает

$$(A\varphi)(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot b_n \cdot \sin(n+1)x = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых $\sin mx$. При $m = 1$ имеем $0 = \lambda b_1$; отсюда $b_1 = 0$. При $m = 2$ имеем $\frac{\pi}{2} \cdot 2^{-1} \cdot b_1 = \lambda b_2$; отсюда $b_2 = 0$. Вообще, при $m > 1$ имеем $\frac{\pi}{2} \cdot 2^{-(m-1)} \cdot b_{m-1} = \lambda b_m$; отсюда $b_m = 0$. В силу полноты системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ функция φ является нулевым элементом.

Оператор A не имеет собственных значений. ■

Пример 4.10.

Пусть в треугольнике $T = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$ задано непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y)$, а при $y > x$ это ядро равно нулю. Интегральный оператор Вольтерры $(A\varphi)(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$ можно рассматривать как действующий в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$. Этот оператор не имеет характеристических чисел. Поэтому он не имеет ненулевых собственных значений. Если $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$, т.е. $A \neq 0$, то и число $\lambda = 0$ не является его собственным значением. ■

Можно указать класс операторов, которые заведомо имеют ненулевые собственные значения. Основная цель данного раздела — доказать следующую теорему, которая будет использована в главе 5.

Теорема 4.3.

Пусть A — вполне непрерывный самосопряжённый линейный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H . Если $A \neq 0$, то оператор A имеет хотя бы одно собственное значение $\lambda \neq 0$; а следовательно, A имеет характеристическое значение $\mu = \frac{1}{\lambda}$. $\|A\| = |\lambda_1|$, где λ_1 — наибольшее по абсолютной величине собственное значение оператора A . ■

Доказательство теоремы 4.3 основано на следующих четырёх леммах.

Лемма 4.1.

Пусть A — самосопряжённый линейный непрерывный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H . Пусть φ — произвольный вектор из H , имеющий $\|\varphi\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\|A\varphi\|^2 \leq \|A^2\varphi\|. \quad (4.9)$$

В неравенстве (4.9) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда φ является собственным вектором оператора A^2 , соответствующим собственному значению $\lambda = \|A\varphi\|^2$.

Доказательство.

Пусть $\|\varphi\| = 1$. Заметим, что

$$\|A\varphi\|^2 = (A\varphi, A\varphi) = (\varphi, A^*A\varphi) = (\varphi, A^2\varphi) \geq 0, \quad (4.10)$$

и запишем неравенство Коши–Буняковского: $(\varphi, A^2\varphi) \leq \|\varphi\| \cdot \|A^2\varphi\| = \|A^2\varphi\|$. Неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство в том и только в том случае, если векторы φ и $A^2\varphi$ коллинеарны, т.е. если $A^2\varphi = \lambda\varphi$. Используя (4.10), найдём число λ : $\|A\varphi\|^2 = (\varphi, A^2\varphi) = (\varphi, \lambda\varphi) = \bar{\lambda} \cdot \|\varphi\|^2 = \bar{\lambda}$. Отсюда следует, что λ действительно и $\lambda = \|A\varphi\|^2$.

Пусть теперь φ — нормированный собственный вектор оператора A^2 , соответствующий собственному значению $\lambda = \|A\varphi\|^2$: $A^2\varphi = \|A\varphi\|^2 \cdot \varphi$, $\|\varphi\| = 1$. Тогда $\|A^2\varphi\| = \|A\varphi\|^2 \cdot \|\varphi\| = \|A\varphi\|^2$. ■

Определение 4.10.

Элемент $\theta \in H$ называют максимальным вектором оператора A , если $\|\theta\| = 1$ и $\|A\theta\| = \|A\|$. ■

Лемма 4.2.

Самосопряжённый вполне непрерывный оператор A в гильбертовом пространстве обладает максимальным вектором.

Доказательство.

Пусть $A \neq 0$. Норму оператора A обозначим через N ; $N \neq 0$. По определению $\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|$. Поэтому в H существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$ векторов, что $\|\varphi_n\| = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\varphi_n\| = N$. Введём обозначение $\psi_n = A\varphi_n$. Вполне непрерывный оператор A переводит ограниченную последовательность $\{\varphi_n\}$ в последовательность $\{\psi_n\}$ в полном пространстве H . Поэтому из $\{\psi_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность; пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_{n_m} = \psi$, т.е. $\|\psi_{n_m} - \psi\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_{n_m}\| = \|\psi\| = N$ (здесь записано свойство непрерывности нормы: если $\xi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi$, то $\|\xi_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|\xi\|$).

Введём вектор $\theta = \frac{\psi}{N}$, $\|\theta\| = 1$. Введём последовательность $\theta_m = \frac{\psi_{n_m}}{N}$.

Применяя неравенство (4.9), получаем $\|A\theta_m\| = \frac{\|A\psi_{n_m}\|}{N} = \frac{\|A^2\varphi_{n_m}\|}{N} \geq$

$$\geq \frac{\|A\varphi_{n_m}\|^2}{N} = \frac{\|\psi_{n_m}\|^2}{N}. \quad \text{С другой стороны, } \|A\theta_m\| \leq \|A\| \cdot \|\theta_m\| = \\ = N \cdot \frac{\|\psi_{n_m}\|}{N} = \|\psi_{n_m}\|.$$

Поэтому имеем двойное неравенство:

$$\frac{\|\psi_{n_m}\|^2}{N} \leq \|A\theta_m\| \leq \|\psi_{n_m}\|;$$

перейдём в нём к пределу при $m \rightarrow \infty$: $N \leq \|A\theta\| \leq N$, т.е. $\|A\theta\| = N$. Это и означает, что θ — максимальный вектор оператора A . ■

Лемма 4.3.

Если θ — максимальный вектор самосопряжённого оператора A , то θ является собственным вектором оператора A^2 , соответствующим собственному значению $\lambda = \|A\|^2$.

Доказательство.

Норму оператора A снова обозначим через N , и пусть θ — его максимальный вектор. Применяя неравенство (4.9), получаем $N^2 = \|A\|^2 = \|A\theta\|^2 \leq \|A^2\theta\| \leq \|A\| \cdot \|A\theta\| \leq \|A\| \cdot \|A\| \cdot \|\theta\| = N^2$, т.е. $\|A\theta\|^2 = \|A^2\theta\|$. Тогда по лемме 4.1 элемент θ является собственным вектором оператора A^2 , который соответствует собственному значению $\lambda = \|A\theta\|^2 = \|A\|^2$. ■

Лемма 4.4.

Если оператор A^2 имеет собственный вектор θ , соответствующий собственному значению N^2 (здесь N — просто некоторое число), то оператор A имеет собственное значение N или собственное значение $(-N)$.

Доказательство.

Для вектора $\theta \neq 0$ равенство $A^2\theta = N^2\theta$ перепишем в виде $(A^2 - N^2E)\theta = 0$, где E — тождественный оператор. Очевидно операторное равенство $(A^2 - N^2E) = (A - NE)(A + NE)$.

Положим $\xi = (A + NE)\theta$. Если $\xi \neq 0$, то ξ является собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению N : $(A - NE)\xi = 0$, $\xi \neq 0$.

Если же $\xi = 0$, то θ является собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $(-N)$: $\xi = (A - (-N)E)\theta = 0$, $\theta \neq 0$. ■

Доказательство теоремы 4.3.

По лемме 4.2 оператор A имеет максимальный вектор θ . По лемме 4.3 этот вектор θ является собственным вектором оператора A^2 , соответствующим собственному значению $\|A\|^2$. По лемме 4.4 оператор A имеет собственное значение $\|A\|$ или собственное значение $(-\|A\|)$; т.е. существует собственное значение λ_1 , абсолютная величина которого равна $\|A\|$.

Докажем, что если существуют другие собственные значения, то собственное значение λ_1 , удовлетворяющее условию $|\lambda_1| = \|A\|$, имеет

наибольшую среди них абсолютную величину. Пусть λ_2 — другое собственное значение и φ_2 — отвечающий ему нормированный собственный вектор: $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$, $\|\varphi_2\| = 1$. Тогда $(A\varphi_2, \varphi_2) = (\lambda_2\varphi_2, \varphi_2) = \lambda_2$ и $|\lambda_1| = \|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)| \geq |\lambda_2|$. ■

Замечание 4.2.

Если самосопряжённый линейный оператор A вполне непрерывен, то $\|A\| = \max_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)|$, причём максимум **достигается** на нормированном собственном векторе, отвечающем собственному значению λ_1 , для которого $|\lambda_1| = \|A\|$. Ср. с утверждением 4.8 ! ■

Глава 5.

Линейные интегральные уравнения 2-го рода с самосопряжёнными ядрами. Теория Гильберта–Шмидта*.

5.1. Основные свойства интегральных операторов Фредгольма с самосопряжёнными ядрами.

В замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ будем считать заданным ядро $\mathcal{K}(x, y)$, которое непрерывно в S или фредгольмово (т.е. ядро класса $L_2(S)$). Такое ядро называют самосопряжённым (или эрмитовым**), если $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$. Самосопряжённое ядро, принимающее лишь действительные значения, симметрично: $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$. По этой причине даже комплексные самосопряжённые ядра в литературе часто называют симметричными. В данном курсе будем различать термины „самосопряжённое ядро“ и „симметричное ядро“. Так ядра $x + y$, $x^2 + y^2$, $i \cdot (x - y)$ (здесь i — мнимая единица) самосопряжённые, причём ядра $x + y$ и $x^2 + y^2$ симметричны. Ядро $i \cdot (x + y)$ не является самосопряжённым.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$, $l > 1$, $\vec{x} \in \Omega$, $\vec{y} \in \Omega$, а $|\vec{x} - \vec{y}|$ обозначает евклидово расстояние между точками $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Если $0 \leq \alpha < \frac{l}{2}$, то ядро $|\vec{x} - \vec{y}|^{-\alpha}$ фредгольмово и симметрично. Свойства интегральных операторов с самосопряжёнными ядрами, зависящими от $\vec{x} \in \mathbb{R}^l$ и $\vec{y} \in \mathbb{R}^l$ практически не отличаются от случая $x \in \mathbb{R}^1$ и $y \in \mathbb{R}^1$. В данной главе будем рассматривать только скалярные независимые переменные x и y .

Перечислим уже известные свойства самосопряжённых ядер и определяемых ими самосопряжённых интегральных операторов, докажем их новые свойства.

Утверждение 5.1.

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ самосопряжённое, то функция $\mathcal{K}(x, x)$ принимает только действительные значения. ■

Утверждение 5.2.

Если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ самосопряжённое, то и все его итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ самосопряжённые.

Доказательство вытекает из следствия 2.1. ■

Интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$ с самосопряжённым ядром будем рассматривать как оператор, действующий

* Шмидт Эрхард (1876–1959) — немецкий математик.

** Эрмит Шарль (1822–1901) — французский математик.

в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$.

Задача 5.1.

Докажите, что если действующий в $L_2[a, b]$ интегральный оператор с непрерывным ядром самосопряжённый, то это ядро самосопряжённое. ■

Утверждение 5.3.

Если самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S или фредгольмово, то интегральный оператор A является вполне непрерывным самосопряжённым оператором в пространстве $L_2[a, b]$. (См. замечание 4.1.) ■

Теорема 5.1.

Пусть непрерывное в замкнутом квадрате S самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ (или более общо: $\mathcal{K}(x, y)$ является ядром класса $L_2(S)$ и определяет интегральный оператор $A \neq 0$). Тогда оно имеет хотя бы одно характеристическое число. Наименьшее по абсолютной величине характеристическое число μ_1 удовлетворяет условию

$$|\mu_1| = \frac{1}{\|A\|}. \quad (5.1)$$

Доказательство следует из теоремы 4.3. Линейный интегральный оператор A с ядром $\mathcal{K}(x, y)$ является вполне непрерывным самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$; $A \neq 0$. Он имеет хотя бы одно собственное значение $\lambda \neq 0$. Тогда $\mu = \frac{1}{\lambda}$ является характеристическим значением. Для наибольшего по абсолютной величине собственного значения λ_1 имеем $|\lambda_1| = \|A\|$. ■

Следствие 5.1.

В условиях теоремы 5.1 для любой функции $\omega \in L_2[a, b]$ выполнено неравенство

$$\|A\omega\|_{L_2[a, b]} \leq \frac{1}{|\mu_1|} \cdot \|\omega\|_{L_2[a, b]}. \quad (5.2)$$

Доказательство вытекает из определения $\|A\|$ и равенства (5.1). ■

Утверждение 5.4.

Все характеристические числа самосопряжённого ядра действительны. Собственные функции самосопряжённого ядра, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны. (См. утверждение 4.7.) ■

Теория Гильберта–Шмидта заключается в изучении линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с самосопряжённым ядром:

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (5.3)$$

$$(\varphi - \mu A\varphi = f);$$

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) - \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy = 0 \quad (5.4)$$

$$(\overset{\circ}{\varphi} - \mu A\overset{\circ}{\varphi} = 0);$$

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y), \quad A = A^*.$$

Для уравнений (5.3), (5.4) справедливы теоремы 2.1—2.4. Но теория этих уравнений может быть построена независимо от теории Фредгольма, поскольку их изучение связано с теорией ортогональных разложений.

Задача 5.2.

Сформулируйте теоремы Фредгольма в случае самосопряжённого ядра. ■

Задача 5.3.

Приведите пример самосопряжённого ядра, имеющего лишь конечное число характеристических значений.

Приведите пример самосопряжённого ядра, имеющего счётное число характеристических значений. ■

Пусть μ — характеристическое число самосопряжённого ядра. Оно имеет конечный ранг r , т.е. ему соответствует конечное число r линейно независимых собственных функций. Применим к ним процесс ортогонализации Грама*–Шмидта в пространстве $L_2[a, b]$ (этот процесс в точности повторяет процесс ортогонализации линейно независимой системы r векторов в конечномерном пространстве). Тогда получим ортонормированную систему r собственных функций, соответствующих характеристическому числу μ . Далее будем всегда предполагать, что такая ортогонализация выполнена. Учитывая утверждение 5.4, получаем, что совокупность **всех** собственных функций самосопряжённого ядра можно считать **ортонормированной**.

Характеристические значения и собственные функции самосопряжённого ядра принято записывать в виде двух последовательностей (либо конечных, либо бесконечных):

$$\begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots; \\ \overset{\circ}{\varphi}_1(x), \overset{\circ}{\varphi}_2(x), \dots, \overset{\circ}{\varphi}_n(x), \dots \end{array} \quad (5.5)$$

При этом соблюдают следующие правила.

1°. Числа μ_n записывают в порядке неубывания их абсолютных величин: $|\mu_n| \leq |\mu_{n+1}|$.

2°. Каждое характеристическое число μ записывают столько раз подряд, каков его ранг r (т.е. геометрическая кратность). Но при

* Грам Йёрген Педерсен (1850–1916) — датский математик.

этом каждому такому числу соответствует только одна собственная функция, а все эти r собственных функций попарно ортогональны и нормированы.

Таким образом, в (5.5) система собственных функций ортонормированная. Если последовательность характеристических чисел в (5.5), бесконечна, то из теории Фредгольма следует, что $|\mu_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Утверждение 5.5.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ действительно и симметрично. Тогда все собственные функции этого ядра можно выбрать действительными.

Доказательство.

Пусть $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ является собственной функцией ядра $\mathcal{K}(x, y)$, соответствующей характеристическому числу μ :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}(x) &= \mathbf{Re}\overset{\circ}{\varphi}(x) + i \cdot \mathbf{Im}\overset{\circ}{\varphi}(x) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy = \\ &= \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \cdot \mathbf{Re}\overset{\circ}{\varphi}(y) dy + i \cdot \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \cdot \mathbf{Im}\overset{\circ}{\varphi}(y) dy. \end{aligned}$$

Поскольку ядро $\mathcal{K}(x, y)$ и характеристическое значение μ действительны, то

$$\mathbf{Re}\overset{\circ}{\varphi}(x) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \cdot \mathbf{Re}\overset{\circ}{\varphi}(y) dy, \quad \mathbf{Im}\overset{\circ}{\varphi}(x) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \cdot \mathbf{Im}\overset{\circ}{\varphi}(y) dy.$$

Если $\mathbf{Re}\overset{\circ}{\varphi}(x) \neq 0$, то $\mathbf{Re}\overset{\circ}{\varphi}(x)$ является отвечающей μ собственной функцией. Если $\mathbf{Im}\overset{\circ}{\varphi}(x) \neq 0$, то $\mathbf{Im}\overset{\circ}{\varphi}(x)$ является отвечающей μ собственной функцией. ■

Замечание 5.1.

В случае, когда самосопряжённое ядро принимает комплексные значения, его собственные функции, возможно, не удастся выбрать действительными. Пусть, например, ядро $i \cdot (x - y)$ имеет собственную функцию $\overset{\circ}{\varphi}(x)$, соответствующую характеристическому числу μ . Это ядро самосопряжённое, поэтому μ действительное. Если бы в равенстве $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \mu \int_a^b i \cdot (x - y) \overset{\circ}{\varphi}(y) dy$ функция $\overset{\circ}{\varphi}$ была действительной, то его левая часть была бы действительной, а правая — чисто мнимой. Это невозможно, поскольку $\overset{\circ}{\varphi}(x) \neq 0$. ■

Задача 5.4.

Пусть $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ — собственная функция самосопряжённого ядра $\mathcal{K}(x, y)$, отвечающая характеристическому числу μ . Докажите, что $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ является отвечающей μ собственной функцией союзного ядра $\mathcal{K}(y, x) = \overline{\mathcal{K}(x, y)}$. Тем самым союзные самосопряжённые ядра имеют одинаковые характеристические значения, а их собственные функции комплексно сопряжены. ■

Утверждение 5.6.

Пусть самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S . Тогда все его собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

По утверждению 2.8 если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S , а функция $\varphi \in L_2[a, b]$, то функция $A\varphi$ непрерывна на $[a, b]$. ■

Утверждение 5.7.

Пусть самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в замкнутом квадрате S . Тогда при всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_n(x)|^2}{\mu_n^2} \leq \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy. \quad (5.6)$$

В левой части неравенства (5.6) в сумме учитываются все μ_n и $\overset{\circ}{\varphi}_n$ последовательностей (5.5); если число характеристических значений μ_n конечно, то и сумма конечна.

Доказательство.

Для непрерывного ядра $\mathcal{K}(x, y)$ при каждом $x \in [a, b]$ существует конечный интеграл $\int_a^b |\overline{\mathcal{K}(x, y)}|^2 dy = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$. Фиксируем x и запишем коэффициенты Фурье функции $\overline{\mathcal{K}(x, y)}$, зависящей от y , по ортонормированной системе функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_n(y)\}$:

$$(\overline{\mathcal{K}}, \overset{\circ}{\varphi}_n) = \int_a^b \overline{\mathcal{K}(x, y)} \cdot \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(y)} dy = \overline{(A\overset{\circ}{\varphi}_n)(x)} = \frac{1}{\mu_n} \cdot \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)}.$$

Для любой ортонормированной системы справедливо неравенство Бесселя*, которым и является неравенство (5.6) для зависящей от y функции $\mathcal{K} \in L_2[a, b]$ (здесь x — параметр). ■

Пусть самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S и имеет характеристические значения и собственные функции (5.5). Тогда при $j \in \mathbb{N}$ можно ввести самосопряжённое непрерывное (поскольку все функции $\overset{\circ}{\varphi}_i$ непрерывны) ядро

$$\mathcal{K}^{(j)}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^j \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i} \quad (5.7)$$

* Бессель Фридрих Вильгельм (1784–1846) — немецкий математик.

(заметьте, что $\mathcal{K}^{(j)}$ — новое обозначение!); если число m линейно независимых собственных функций ядра $\mathcal{K}$ конечно, то $j \leq m$. Ядра $\mathcal{K}^{(j)}$ определяют самосопряжённые интегральные операторы $A^{(j)}$, которые действуют по формуле

$$(A^{(j)}\omega)(x) = (A\omega)(x) - \sum_{i=1}^j \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \quad (5.8)$$

для любой функции $\omega \in L_2[a, b]$.

Замечание 5.2.

В формуле (5.8) можно опустить независимую переменную x :

$$A^{(j)}\omega = A\omega - \sum_{i=1}^j \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i.$$

Далее будем иногда поступать таким образом, если это не приводит к недоразумению. ■

Утверждение 5.8.

Пусть все характеристические числа и ортонормированные собственные функции непрерывного самосопряжённого ядра $\mathcal{K}(x, y)$ записаны в последовательностях (5.5). Тогда все характеристические числа и собственные функции ядра $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$ (номер j здесь фиксирован) составляют последовательности

$$\begin{aligned} & \mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \dots; \\ & \overset{\circ}{\varphi}_{j+1}(x), \overset{\circ}{\varphi}_{j+2}(x), \dots. \end{aligned}$$

Для любой функции $\omega \in L_2[a, b]$ выполнено неравенство

$$\|A^{(j)}\omega\|_{L_2[a, b]} \leq \frac{\|\omega\|_{L_2[a, b]}}{|\mu_{j+1}|}. \quad (5.9)$$

Доказательство.

Идея введения операторов $A^{(j)}$ состоит в том, что из объединения всех собственных подпространств оператора A отбрасываются его собственные подпространства, натянутые на $\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_j$.

В формуле (5.8) в качестве функции ω выберем функцию $\overset{\circ}{\varphi}_n$, $n \geq j + 1$; тогда имеем из (5.8):

$$A^{(j)}\overset{\circ}{\varphi}_n = A\overset{\circ}{\varphi}_n - \sum_{i=1}^j \frac{(\overset{\circ}{\varphi}_n, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \overset{\circ}{\varphi}_i = A\overset{\circ}{\varphi}_n = \frac{1}{\mu_n} \overset{\circ}{\varphi}_n,$$

поскольку все $(\overset{\circ}{\varphi}_n, \overset{\circ}{\varphi}_i) = 0$ в силу ортогональности собственных функций. Поэтому μ_n и $\overset{\circ}{\varphi}_n(x)$ при $n \geq j+1$ являются характеристическими значениями и собственными функциями ядра $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$.

Обратно, пусть μ и $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ — характеристическое число и отвечающая ему собственная функция ядра $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$. Тогда по формуле (5.8)

$$\overset{\circ}{\varphi} = \mu A^{(j)} \overset{\circ}{\varphi} = \mu A \overset{\circ}{\varphi} - \mu \sum_{i=1}^j \frac{(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \overset{\circ}{\varphi}_i. \quad (5.10)$$

При $n = 1, 2, \dots, j$ умножим скалярно равенство (5.10) на $\overset{\circ}{\varphi}_n$:

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_n) &= \mu \cdot (A \overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_n) - \mu \cdot \sum_{i=1}^j \frac{(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot (\overset{\circ}{\varphi}_i, \overset{\circ}{\varphi}_n)}{\mu_i} = \\ &= \mu \cdot (\overset{\circ}{\varphi}, A \overset{\circ}{\varphi}_n) - \frac{\mu}{\mu_n} \cdot (\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_n) = \frac{\mu}{\mu_n} \cdot (\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_n) - \frac{\mu}{\mu_n} \cdot (\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_n) = 0 \end{aligned}$$

(здесь использованы следующие факты: $(\overset{\circ}{\varphi}_i, \overset{\circ}{\varphi}_n) = \begin{cases} 0, & i \neq n, \\ 1, & i = n; \end{cases} \quad A^* = A; \mu_n \in \mathbb{R}).$

Следовательно, в (5.10) сумма $\sum_{i=1}^j \frac{(\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \equiv 0$ на отрезке

$a \leq x \leq b$, т.е. $\overset{\circ}{\varphi} = \mu A \overset{\circ}{\varphi}$. Таким образом, μ и $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ оказались характеристическим числом и собственной функцией ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Причём, $\overset{\circ}{\varphi}$ ортогональна всем собственным функциям $\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_j$. Поэтому μ совпадает с одним из характеристических чисел $\mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \dots$. А если пронормировать функцию $\overset{\circ}{\varphi}$, то такая нормированная функция совпадёт с $\overset{\circ}{\varphi}_n$ при некотором $n \geq j+1$.

Итак, μ_{j+1} является наименьшим по абсолютной величине характеристическим числом ядра $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$. Применяя к оператору $A^{(j)}$ неравенство (5.2), получаем неравенство (5.9). ■

Следствие 5.2.

Если в условиях утверждения 5.8 оператор A имеет бесконечное число характеристических значений, то $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|A^{(j)} \omega\|_{L_2[a, b]} = 0$ для любой функции $\omega \in L_2[a, b]$.

Доказательство вытекает из неравенства (5.9), поскольку $|\mu_{j+1}| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$. ■

Задача 5.5.

В квадрате $S = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix) \cdot \sin(iy)}{i^2}$. Непрерывно ли данное ядро в S ? Является ли оно симметричным? Найдите все характеристические

числа и собственные функции ядра $\mathcal{K}$. Найдите ядра $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$ и все их характеристические числа и собственные функции. ■

Утверждение 5.9.

Непрерывное самосопряжённое ядро имеет лишь конечное число характеристических значений в том, и только в том случае, если оно вырожденное.

Доказательство.

В разделах 2.4 и 2.5 показано, что вырожденное ядро может иметь не более конечного числа характеристических значений.

Пусть непрерывное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y)$ имеет лишь конечное число характеристических значений и, следовательно, лишь конечное число m ортонормированных собственных функций:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m; \\ \overset{\circ}{\varphi}_1(x), \overset{\circ}{\varphi}_2(x), \dots, \overset{\circ}{\varphi}_m(x).$$

Тогда непрерывное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}^{(m)}(x, y)$ не имеет характеристических чисел: в противном случае имелась бы собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ ядра $\mathcal{K}^{(m)}(x, y)$, которая является и собственной функцией ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Но $\overset{\circ}{\varphi}$ ортогональна всем $\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_m$, т.е. ядро $\mathcal{K}$ имело бы в этом случае ортогональную систему из более, чем m , собственных функций. По теореме 5.1 ядро $\mathcal{K}^{(m)}(x, y) \equiv 0$. Поэтому из равенства (5.7) получаем

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^m \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i}. \quad (5.11)$$

■

Следствие 5.3.

Если в условиях утверждения 5.9 оператор A имеет вырожденное ядро вида (5.11), то оператор $A^{(m)} = 0$, т.е. $(A^{(m)}\omega)(x) \equiv 0$ для любой функции $\omega \in L_2[a, b]$ (ср. со следствием 5.2). ■

Замечание 5.3.

Вырожденность ядра $\mathcal{K}$ означает, что интегральный оператор A с таким ядром конечномерный, т.е. $\dim \text{Ran} A < \infty$ (см. пример 4.8). ■

Всюду выше собственной функцией оператора A называлась ненулевая функция $\overset{\circ}{\varphi}$, которая при некотором $\mu \neq 0$ удовлетворяет уравнению $\overset{\circ}{\varphi} = \mu A \overset{\circ}{\varphi}$. Это можно выразить по-другому: $A \overset{\circ}{\varphi} = \lambda \overset{\circ}{\varphi}$, где $\lambda = \frac{1}{\mu}$ — **собственное** значение оператора A . Если интегральный оператор Фредгольма имеет бесконечное число собственных значений λ_n , то $\{\lambda_n\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Но возможны и собственные функции φ , отвечающие собственному значению $\lambda = 0$, т.е. $\varphi \neq 0$, $\varphi \in \text{Ker} A$. Собственному

значению $\lambda = 0$ может отвечать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных функций. Например, в случае ядра $\mathcal{K}(x, y) \equiv 0$, т.е. в случае $A = 0$, будет $\text{Ker} A = L_2[a, b]$.

Пример 5.1.

В квадрате $S = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = x^2 y^2$.

Для оператора $(A\varphi)(x) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 \cdot \varphi(y) dy$ имеем $A = A^* \neq 0$.

Пусть φ — произвольная нечётная функция, $\varphi \in L_2[-1, 1]$. Тогда $(A\varphi)(x) \equiv 0$. Следовательно, $\dim \text{Ker} A = +\infty$, т.е. $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A бесконечной геометрической кратности. ■

Пример 5.2.

В квадрате $S = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2ix) \cdot \sin(2iy)}{(2i)^2}$. По признаку Вейерштрасса этот функциональный ряд сходится равномерно в S , поэтому ядро $\mathcal{K}$ непрерывно. Очевидно, что ядро $\mathcal{K}$ симметрично. Убедимся, что интегральный оператор A с таким ядром имеет собственное значение $\lambda = 0$ бесконечной геометрической кратности, т.е. $\dim \text{Ker} A = +\infty$. Для этого достаточно рассмотреть систему $\{\sin(2n+1)x\}_{n=0}^{+\infty}$ линейно независимых на отрезке $[0, \pi]$ функций; для них имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2ix) \cdot \sin(2iy)}{(2i)^2} \right) \sin(2n+1)y dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2ix)}{(2i)^2} \cdot \int_0^{\pi} \sin(2iy) \cdot \sin(2n+1)y dy = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sin(2n+1)x \in \text{Ker} A$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ ■

Утверждение 5.10.

Пусть A — самосопряжённый интегральный оператор с непрерывным ядром. Функция $\varphi \in \text{Ker} A$ в том, и только в том случае, если она ортогональна всем собственным функциям оператора A , соответствующим его характеристическим значениям (т.е. соответствующим его ненулевым собственным значениям).

Доказательство.

Необходимость. Пусть для функции φ её образ $A\varphi$ является нулевым элементом в $L_2[a, b]$. Тогда для любого характеристического числа μ_i и отвечающей ему собственной функции $\overset{\circ}{\varphi}_i$ имеем $(\overset{\circ}{\varphi}_i, \varphi) = (\mu_i A \overset{\circ}{\varphi}_i, \varphi) = \mu_i (A \overset{\circ}{\varphi}_i, \varphi) = \mu_i (\overset{\circ}{\varphi}_i, A\varphi) = \mu_i \cdot (\overset{\circ}{\varphi}_i, 0) = 0$.

Достаточность докажем от противного. Пусть в $L_2[a, b]$ существует такой элемент $\varphi \neq 0$, что $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = 0$ для всех собственных функций $\overset{\circ}{\varphi}_i$, соответствующих характеристическим числам оператора A , но $A\varphi \neq 0$. Нормируем функцию φ : положим $\omega = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{L_2[a, b]}}$. Введём

обозначение: $\delta = \|A\omega\|_{L_2[a,b]}$. Из условия $A\varphi \neq 0$ следует $\delta > 0$.

Рассмотрим все характеристические значения μ_n , для которых $|\mu_n| \leq \frac{1}{\delta}$ (т.е. $|\lambda_n| \geq \delta$). Им отвечает конечное число j ортонормированных собственных функций:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j; \\ \overset{\circ}{\varphi}_1(x), \overset{\circ}{\varphi}_2(x), \dots, \overset{\circ}{\varphi}_j(x).$$

Здесь $j = j(\delta)$, и $|\mu_{j+1}| > \frac{1}{\delta}$. Применим оператор $A^{(j)}$ к выбранной функции ω ; тогда по формуле (5.8) получим

$$A^{(j)}\omega = A\omega - \sum_{i=1}^j \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i = A\omega,$$

поскольку все $(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i) = 0$. Тогда по неравенству (5.9) имеем

$$\delta = \|A\omega\|_{L_2[a,b]} = \|A^{(j)}\omega\|_{L_2[a,b]} \leq \frac{\|\omega\|_{L_2[a,b]}}{|\mu_{j+1}|} = \frac{1}{|\mu_{j+1}|},$$

т.е. $|\mu_{j+1}| \leq \frac{1}{\delta}$ — противоречие. ■

5.2. Теорема Гильберта–Шмидта.

Собственные функции самосопряжённого ядра образуют ортонормированную систему (5.5). Поэтому имеет смысл вопрос о разложении какой-либо заданной функции в ряд Фурье по этой ортонормированной системе.

Определение 5.1.

Функцию $\eta(x)$, $a \leq x \leq b$, называют истокообразно представимой через ядро $\mathcal{K}(x, y)$, если существует такая функция $\omega \in L_2[a, b]$, что

$$\eta(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\omega(y)dy = (A\omega)(x) \quad (5.12)$$

при всех $x \in [a, b]$. ■

Истокообразная представимость функции η означает, что $\eta \in \text{Ran} A$. Определение 5.1 фактически повторяет определение 2.8, но теперь функции $\mathcal{K}$ и ω не обязательно непрерывны.

Теорема 5.2 (теорема Гильберта–Шмидта).

Пусть самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$. Пусть функция $\eta(x)$ истокообразно представима через ядро $\mathcal{K}$: $\eta = A\omega, \omega \in L_2[a, b]$ (см. (5.12)).

Тогда ряд Фурье

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i) \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \quad (5.13)$$

функции $\eta(x)$ по ортонормированной системе (5.5) собственных функций ядра $\mathcal{K}(x, y)$ сходится к $\eta(x)$, причём его сходимость **абсолютная** и **равномерная** на отрезке $[a, b]$;

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x). \quad (5.14)$$

(Если в (5.5) число линейно независимых функций $\overset{\circ}{\varphi}_i$ конечно, то и суммы в (5.13) и (5.14) конечны.)

Доказательство.

По утверждению 2.8 из непрерывности ядра $\mathcal{K}$ следует непрерывность функции η на отрезке $[a, b]$, истокообразно представимой через ядро $\mathcal{K}$. По утверждению 5.6 все собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_i$ этого ядра непрерывны на $[a, b]$. Поэтому существуют коэффициенты Фурье функции η по ортонормированной системе функций (5.5):

$$\int_a^b \eta(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)} dx = (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (A\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (\omega, A\overset{\circ}{\varphi}_i) = \frac{1}{\mu_i} (\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i) \quad (5.15)$$

(здесь использовано $A = A^*$ и $\mu_i \in \mathbb{R}$).

Если число m линейно независимых собственных функций в (5.5) конечно, то по утверждению 5.9 ядро $\mathcal{K}$ вырожденное и имеет вид

$$(5.11). \text{ Тогда } \eta(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \omega(y) dy = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu_i} \cdot \int_a^b \omega(y) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)} dy \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) = \\ = \sum_{i=1}^m \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x), \text{ т.е. выполнено равенство (5.14). В этом случае теорема доказана.}$$

Пусть теперь ядро $\mathcal{K}$ не является вырожденным. Тогда в (5.5) имеем бесконечное число линейно независимых собственных функций, и $|\mu_i| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty$. Запишем для функции ω неравенство (5.9):

$$\|A^{(j)}\omega\|_{L_2[a,b]} = \left\| A\omega - \sum_{i=1}^j \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i \right\|_{L_2[a,b]} \leq \frac{\|\omega\|_{L_2[a,b]}}{|\mu_{j+1}|} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

(см. определение операторов $A^{(j)}$ формулой (5.8) и следствие 5.2). Этим доказано, что функциональный ряд (5.13) сходится к функции η **в среднем квадратическом**, т.к. $A\omega = \eta$, а в силу (5.15) сумма

$$\sum_{i=1}^j \frac{(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i \text{ является частичной суммой ряда Фурье (5.13).}$$

Докажем, что ряд (5.13) сходится к функции η **равномерно** на $[a, b]$ и **абсолютно**.

Введём обозначение $M = \max_{(x,y) \in S} |\mathcal{K}(x, y)|$. Заметим, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{n+p} |(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)| \cdot \left| \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)}{\mu_i} \right| &\leq \left(\sum_{i=n}^{n+p} |(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i^2} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{n+p} |(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=n}^{n+p} |(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)|^2 \right)^{1/2} \cdot M \cdot (b-a)^{1/2} = \sigma_{np} \end{aligned} \quad (5.16)$$

(здесь использованы следующие факты: числовое неравенство Коши–Буняковского в $\mathbb{R}^{p+1}$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, неравенство (5.6); введено обозначение σ_{np}). Для любой ортонормированной системы $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ выполнено неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\omega, \overset{\circ}{\varphi}_i)|^2 \leq \|\omega\|_{L_2[a,b]}^2, \quad (5.17)$$

которое означает, что числовой ряд в левой части (5.17) сходится. Тогда по критерию Коши сходимости этого числового ряда получаем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что при любом натуральном $n \geq N(\varepsilon)$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $\sigma_{np} < \varepsilon$. По критерию Коши равномерной сходимости отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость функционального ряда (5.14).

Осталось доказать, что ряд (5.14) равномерно сходится именно к функции $\eta(x)$. Из непрерывности всех функций $\overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ и из равномерной сходимости ряда (5.14) следует, что его сумма непрерывна на $[a, b]$. Обозначим сумму ряда (5.14) через $\zeta(x)$, а его n -ую частичную сумму — через $\zeta_n(x)$. Из равномерной на $[a, b]$ сходимости последовательности $\{\zeta_n(x)\}$ к функции $\zeta(x)$ следует её сходимость к $\zeta(x)$ в среднем квадратическом:

$$\|\zeta - \zeta_n\|_{L_2[a,b]} \leq (b-a)^{1/2} \cdot \|\zeta - \zeta_n\|_{C[a,b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Вспоминая, что ряд (5.14) сходится в среднем квадратическом к функции $\eta(x)$, т.е. $\|\eta - \zeta_n\|_{L_2[a,b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, получаем

$$\|\eta - \zeta\|_{L_2[a,b]} = \|\eta - \zeta_n + \zeta_n - \zeta\|_{L_2[a,b]} \leq \|\eta - \zeta_n\|_{L_2[a,b]} + \|\zeta_n - \zeta\|_{L_2[a,b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Таким образом, для непрерывных функций η и ζ имеем $\|\eta - \zeta\|_{L_2[a,b]} = 0$. Поэтому $\eta(x) \equiv \zeta(x)$ на отрезке $[a, b]$. ■

Замечание 5.4.

Из доказательства теоремы 5.2 видно (см. (5.16)), что в условиях этой теоремы равномерно на $[a, b]$ сходится функциональный ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} |(\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x)|$. В этом случае говорят, что функциональный ряд (5.13) **регулярно** сходится на $[a, b]$. Очевидно, что регулярно сходящийся ряд сходится абсолютно и равномерно. ■

Замечание 5.5.

В условии теоремы Гильберта–Шмидта не предполагается ни замкнутость в пространстве $L_2[a, b]$ ортонормированной системы (5.5) функций $\overset{\circ}{\varphi}_i$, ни сходимостъ ряда Фурье функции ω по этой системе.

Теорема Гильберта–Шмидта доказывает, что система (5.5) собственных функций оператора A замкнута в его множестве значений $Ran A$. Поэтому в $Ran A$ для этой системы функций выполнено равенство Парсеваля*: $\sum_{i=1}^{\infty} |(\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i)|^2 = \|\eta\|_{L_2[a, b]}^2$ — для любой функции $\eta \in Ran A$. (Напомним, что свойство замкнутости ортонормированной системы является важнейшим в теории рядов Фурье. См. [23], гл.10, §2) ■

В курсе линейной алгебры доказано, что линейный оператор A , действующий в конечномерном евклидовом пространстве (над полем чисел $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$) является самосопряжённым в том, и только в том случае, если в этом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора A действительна и диагональна. Этот базис целиком состоит из собственных векторов оператора A , а все собственные значения оператора A действительны.

Теорема Гильберта–Шмидта распространяет этот факт на вполне непрерывные самосопряжённые интегральные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$. Чтобы построить в $L_2[a, b]$ ортонормированный базис из собственных функций такого оператора A , надо к ортонормированной системе (5.5) функций $\overset{\circ}{\varphi}_i$ добавить какой-нибудь ортонормированный базис нуль-множества $Ker A$, если $Ker A \neq 0$ (т.е. если число $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A); при этом согласно утверждению 5.10 получим ортонормированную систему функций. Такая ортонормированная система будет ортонормированным **базисом** в пространстве $L_2[a, b]$, т.е. эта система функций будет замкнутой в $L_2[a, b]$. Доказательство этого факта основано на теореме об ортогональной проекции, которая справедлива в любом гильбертовом пространстве (она изучается в курсе функционального анализа; см. в книге [Л.А. Люстерник, В.И.Соболев. Краткий курс функционального анализа. Гл.2, §3]).

Напомним сначала, что непустое множество элементов линейного пространства называют линейным многообразием, если вместе с любыми его элементами φ_1 и φ_2 это множество содержит любую их линейную комбинацию. В линейном нормированном пространстве линейное

*Парсеваль Марк Антуан (1755–1836) — французский математик.

многообразии называют подпространством, если оно является замкнутым множеством. Конечномерное линейное многообразие автоматически замкнуто; бесконечномерное линейное многообразие может быть как замкнутым, так и не замкнутым (приведите примеры!).

Теорема 5.3 (теорема об ортогональной проекции).

Пусть H — гильбертово пространство, N — линейное подпространство в H . Тогда для любого элемента $\xi \in H$ имеет место разложение $\xi = \varphi + \eta$, где $\varphi \in N$, $\eta \perp N$. Это разложение единственно. ■

Элемент φ в указанном разложении называют ортогональной проекцией элемента ξ на подпространство N . Совокупность $N^\perp$ всех элементов пространства H , ортогональных подпространству N , также является подпространством: все такие элементы образуют линейное многообразие, а замкнутость множества $N^\perp$ следует из непрерывности скалярного произведения. Подпространство $N^\perp$ называют ортогональным дополнением к N и говорят, что пространство H разложено в ортогональную сумму подпространств N и $N^\perp$: $H = N \oplus N^\perp$. Это значит, что любой элемент $\xi \in H$ однозначно представим в виде $\xi = \varphi + \eta$, где $\varphi \in N$, $\eta \in N^\perp$.

В условиях теоремы 5.2 множество $N = \text{Ker} A$ является замкнутым линейным многообразием в силу непрерывности линейного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $H = L_2[a, b]$. Из теоремы 5.2 и из утверждения 5.10 следует, что

$$L_2[a, b] = \text{Ker} A \oplus \overline{\text{Ran} A},$$

где черта означает замыкание множества $\text{Ran} A$ по норме $\|\cdot\|_{L_2[a, b]}$. Таким образом, для любой функции $\xi \in L_2[a, b]$ имеется единственное представление в виде $\xi = \sum_i (\xi, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i + \varphi$, где $\varphi \in \text{Ker} A$, а число слагаемых в сумме конечно или счётно в зависимости от оператора

A . При этом $A\xi = \sum_i \frac{(\xi, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i$. Если $\eta = \xi - \varphi$, т.е. $\eta \in \overline{\text{Ran} A}$,

то $(\xi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i)$ для всех номеров i . Наконец, заметим, что если ортонормированная система $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ является замкнутой в $\text{Ran} A$, то она будет замкнутой и в $\overline{\text{Ran} A}$ (докажите!).

Замечание 5.6.

В теореме 5.2 можно ослабить требования, предъявляемые к ядру $K(x, y)$.

Пусть самосопряжённое ядро фредгольмово (т.е. $K \in L_2(S)$), не обязательно непрерывное, а функция $\eta(x)$ истокообразно представима через ядро K : $\eta = A\omega$, $\omega \in L_2[a, b]$. Тогда уже нельзя утверждать, что η непрерывна, но заведомо $\eta \in L_2[a, b]$ и $\overset{\circ}{\varphi}_i \in L_2[a, b]$ для любого номера i (см. утверждение 2.6). В этом случае существуют коэффициенты

Фурье (5.15) функции η , а ряд Фурье (5.13) сходится к функции η в среднем квадратическом.

Если же дополнительно потребовать выполнения неравенства $\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \leq \text{const}$ при всех $x \in [a, b]$ (постоянная не зависит от x), то можно доказать равномерную на $[a, b]$ сходимость ряда Фурье (5.13) к функции $\eta(x)$ (см. неравенство (5.16) в доказательстве теоремы 5.2). ■

5.3. Билинейные ряды.

В утверждении 5.9 доказано, что непрерывное самосопряжённое вырожденное ядро имеет вид (5.11). Можно ли в аналогичной форме представить невырожденное непрерывное самосопряжённое ядро?

Утверждение 5.11.

Пусть невырожденное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в замкнутом квадрате S . Пусть $\mu_i, \overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ — характеристические значения и ортонормированные собственные функции ядра $\mathcal{K}$, записанные в (5.5). Тогда при $n \geq 2$ итерированное ядро $\mathcal{K}_n(x, y)$ разлагается в билинейный ряд по собственным функциям ядра $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i^n}. \quad (5.18)$$

Функциональный ряд (5.18) сходится **абсолютно и равномерно** в замкнутом квадрате S . ■

Замечание 5.7.

В случае вырожденного ядра число линейно независимых функций $\overset{\circ}{\varphi}_i$ в (5.5) конечно, и сумма в (5.18) конечна. ■

Замечание 5.8.

Из утверждения 2.4 следует, что все μ_i^n являются характеристическими значениями итерированного ядра $\mathcal{K}_n$, которым соответствуют те же собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_i$. ■

Доказательство утверждения 5.11.

По формуле (2.18) итерированное ядро $\mathcal{K}_n$ можно представить в виде

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \mathcal{K}_{n-1}(t, y) dt, \quad n \geq 2. \quad (5.19)$$

Это означает, что при каждом фиксированном $y \in [a, b]$ итерированное ядро $\mathcal{K}_n(x, y)$ как функция переменной x истокообразно представимо через ядро $\mathcal{K}(x, t)$ (функция $\mathcal{K}_{n-1}$, играющая роль функции ω в (5.12), непрерывна по следствию 2.2). По теореме Гильберта–Шмидта при

каждом фиксированном y функция $\mathcal{K}_n(x, y)$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям ядра $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \mathcal{K}_n(\tau, y) \overline{\varphi_i(\tau)} d\tau \cdot \varphi_i(x), \quad (5.20)$$

причём функциональный ряд (5.20) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $a \leq x \leq b$.

По утверждению 5.2 все итерированные ядра $\mathcal{K}_n$ самосопряжённого ядра $\mathcal{K}$ тоже являются самосопряжёнными: $\mathcal{K}_n(\tau, y) = \mathcal{K}_n^*(\tau, y) = \overline{\mathcal{K}_n(y, \tau)}$. Поэтому коэффициенты Фурье в (5.20) имеют вид

$$\int_a^b \overline{\mathcal{K}_n(y, \tau)} \overline{\varphi_i(\tau)} d\tau = \overline{(A^n \varphi_i)(y)} = \frac{\overline{\varphi_i(y)}}{\mu_i^n}, \quad (5.21)$$

где $(A\varphi)(y) = \int_a^b \mathcal{K}(y, \tau) \varphi(\tau) d\tau$. Таким образом, равенство (5.20) означает, что для итерированного ядра $\mathcal{K}_n$ справедливо разложение (5.18), причём функциональный ряд (5.18) при каждом фиксированном значении $y \in [a, b]$ сходится абсолютно и равномерно по переменной x на отрезке $a \leq x \leq b$.

Осталось доказать, что ряд (5.18) сходится равномерно в замкнутом квадрате S .

Сначала в равенстве (5.18) положим $n = 2$ и $y = x$. Тогда формула (5.19) означает $\mathcal{K}_2(x, x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \mathcal{K}(t, x) dt = \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \overline{\mathcal{K}(x, t)} dt = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$ (в последнем равенстве переменная интегрирования переобозначена с t на y), а равенство (5.18) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\mu_i^2} = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \quad (5.22)$$

(ср. с неравенством (5.6) в утверждении 5.7). Ряд в (5.22) допускает применение признака равномерной сходимости Дини*: все члены этого ряда непрерывны и неотрицательны на отрезке $a \leq x \leq b$, его сумма непрерывна на этом отрезке; поэтому функциональный ряд в (5.22) сходится к своей сумме равномерно на указанном отрезке.

* Дини Улисс (1845–1918) — итальянский математик.

Теперь пусть n — произвольное натуральное число, $n \geq 2$. Вспомогая, что $|\mu_1| \leq |\mu_i|$ при всех i , и применяя числовое неравенство Коши–Буняковского в $\mathbb{R}^{p+1}$, получаем при всех натуральных k и p

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+p} \frac{|\dot{\varphi}_i(x) \overline{\dot{\varphi}_i(y)}|}{|\mu_i|^n} &\leq \sum_{i=k}^{k+p} \frac{|\dot{\varphi}_i(x) \overline{\dot{\varphi}_i(y)}|}{|\mu_1|^{n-2} \cdot |\mu_i| \cdot |\mu_i|} \leq \\ &\leq \frac{1}{|\mu_1|^{n-2}} \cdot \left(\sum_{i=k}^{k+p} \frac{|\dot{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=k}^{k+p} \frac{|\dot{\varphi}_i(y)|^2}{\mu_i^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

По критерию Коши равномерной на $[a, b]$ сходимости ряда (5.22) для любого числа $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших номерах k и при всех натуральных p правая часть неравенства (5.23) будет меньше, чем ε , сразу для всех $x \in [a, b]$ и для всех $y \in [a, b]$. Таким образом, по критерию Коши ряд (5.18) сходится абсолютно и равномерно на S . ■

Замечание 5.9. Проинтегрируем на $[a, b]$ равномерно сходящийся ряд (5.22) почленно и учтём, что $\|\dot{\varphi}_i\|_{L_2[a,b]}^2 = 1$. Тогда приходим к формуле

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2} = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy. \quad (5.24)$$

Если ядро $\mathcal{K} \in L_2(S)$, но не обязательно самосопряжённое, а $\{\mu_i\}$ — последовательность его характеристических чисел с учётом их геометрических кратностей, то справедливо неравенство Шура*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_i|^2} \leq \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy. \quad (5.25)$$

Для самосопряжённого ядра в неравенстве (5.25) имеет место знак равенства. Кроме того, в случае самосопряжённого ядра $\mathcal{K}$ самосопряжёнными будут и все итерированные ядра $\mathcal{K}_n$, а их характеристические числа равны μ_i^n . Применяя формулу (5.24) для ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^{2n}} = \int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}_n(x, y)|^2 dx dy. \quad \blacksquare \quad (5.26)$$

Билинейное разложение (5.18) получено для итерированных ядер: при $n \geq 2$. Возможно ли аналогичное разложение самого ядра $\mathcal{K}(x, y)$,

* Шур Иссай (1875–1941) — немецкий математик.

если оно не является вырожденным? Оказывается, что при $n = 1$ разложение (5.18) возможно в том смысле, что ряд (5.18) будет сходиться в среднем квадратическом по одной переменной (по x или по y) равномерно относительно другой переменной.

Утверждение 5.12.

Пусть невырожденное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в замкнутом квадрате S . Тогда зависящая от переменной y функциональная последовательность

$$\sigma_m(y) = \int_a^b \left| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^m \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i} \right|^2 dx \quad (5.27)$$

при $m \rightarrow +\infty$ равномерно на $[a, b]$ сходится к нулю.

Доказательство.

Из равенства (5.21) при $n = 1$ видно, что для каждого фиксированного $y \in [a, b]$ коэффициенты Фурье $\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)} dx$ ядра $\mathcal{K}(x, y)$ по ортонормированной системе его собственных функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ равны $\frac{\overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i}$. Для m -ой частичной суммы ряда Фурье при каждом фиксированном $y \in [a, b]$ справедливо тождество Бесселя:

$$\left\| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^m \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i} \right\|_{L_2[a, b]}^2 = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx - \sum_{i=1}^m \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(y)|^2}{\mu_i^2} \quad (5.28)$$

(оно выражает экстремальное свойство коэффициентов Фурье: среди всех сумм вида $\sum_{i=1}^m c_i \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ наименьшее отклонение от функции $\mathcal{K}$ как функции переменной x по норме $\|\cdot\|_{L_2[a, b]}$ имеет m -ая частичная сумма ряда Фурье функции $\mathcal{K}$).

Равенство (5.22) (x и y меняем в нём ролями) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(y)|^2}{\mu_i^2} = \int_a^b |\mathcal{K}(y, x)|^2 dx = \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx \quad (5.29)$$

в силу самосопряжённости ядра $\mathcal{K}$: из условия $\mathcal{K}(y, x) = \overline{\mathcal{K}(x, y)}$ следует $|\mathcal{K}(y, x)| = |\mathcal{K}(x, y)|$. Ряд в (5.29) сходится равномерно по y на отрезке $[a, b]$. Отсюда и из (5.28) следует, что билинейный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i} \quad (5.30)$$

сходится к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ в том смысле, что $\sigma_m(y) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ (см. (5.27)). ■

Замечание 5.10.

В утверждении 5.12 можно поменять ролями x и y . ■

Следствие 5.4.

Билинейный ряд (5.30) сходится к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ в среднем квадратическом в квадрате S .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma_m(y) dy &= \int_a^b \int_a^b \left| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^m \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i} \right|^2 dx dy = \\ &= \int_a^b \int_a^b \left| \mathcal{K}^{(m)}(x, y) \right|^2 dx dy \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0. \blacksquare \end{aligned} \quad (5.31)$$

Замечание 5.11.

Ядра $\mathcal{K}^{(m)}$ введены формулой (5.7). Предельное соотношение (5.31) означает, что $\|\mathcal{K}^{(m)}\|_{L_2(S)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, т.е. последовательность ядер $\mathcal{K}^{(m)}(x, y)$ стремится к нулю в среднем квадратическом в квадрате S . ■

Замечание 5.12.

В формуле (5.18) положим $y = x$ и проинтегрируем равномерно сходящийся ряд почленно. Тогда получим выражение следа итерированного ядра $\mathcal{K}_n$:

$$\text{tr} \mathcal{K}_n = \int_a^b \mathcal{K}_n(x, x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^n}, \quad n \geq 2. \blacksquare \quad (5.32)$$

Задача 5.6.

Пользуясь формулой $\mathcal{K}_{2n}(x, y) = \int_a^b \mathcal{K}_n(x, t) \mathcal{K}_n(t, y) dt$ (см. утверждение 2.2) и самосопряжённостью ядер $\mathcal{K}_n$, $n \geq 2$, найдите след ядра $\mathcal{K}_{2n}$. Получите формулу (5.26) из формулы (5.32). ■

Задача 5.7.

Проверьте, что для ортонормированной системы функций (5.5) система функций двух переменных $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}\}$ является ортонормированной в $L_2(S)$, т.е. в смысле скалярного произведения $\int_a^b \int_a^b \xi(x, y) \overline{\zeta(x, y)} dx dy$ функций ξ и ζ . ■

Замечание 5.13.

Утверждение 5.11 означает, что билинейный ряд (5.18) является рядом Фурье функции двух переменных $\mathcal{K}_n(x, y)$, $n \geq 2$, по ортонормированной системе функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}\}$, и что этот ряд сходится

к функции $\mathcal{K}_n(x, y)$ регулярно на S (т.е. ряд из модулей его членов сходится равномерно).

В утверждении 5.11 и в следствии 5.4 доказано, что билинейный ряд (5.30) является рядом Фурье функции двух переменных $\mathcal{K}(x, y)$ по ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}\}$, и что этот ряд сходится к $\mathcal{K}(x, y)$ в среднем квадратическом в квадрате S . ■

Замечание 5.14.

Можно ослабить требования, предъявляемые к ядру $\mathcal{K}(x, y)$. Если самосопряжённое ядро $\mathcal{K} \in L_2(S)$, но не обязательно непрерывно, то можно доказать, что билинейные ряды (5.18) и (5.30) сходятся в среднем квадратическом на S .

Потребуем дополнительно выполнения неравенства

$$\int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \leq C < +\infty \quad (5.33)$$

при всех $x \in [a, b]$ (постоянная C не зависит от x). Тогда из (5.22) следует $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i^2} \leq C$, и аналогично неравенству (5.23) получаем

$$\sum_{i=k}^{k+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}|}{|\mu_i|^n} \leq \frac{C}{|\mu_k|^{n-2}}.$$

Поэтому в предположениях $\mathcal{K} \in L_2(S)$ и (5.33) при $n \geq 3$ ряд (5.18) сходится регулярно на S . При тех же условиях, но при $n = 2$, ряд (5.18) сходится равномерно по одной из переменных для каждого фиксированного значения другой переменной (точнее — для **почти** каждого значения другой переменной, т.к. в данном случае интегралы понимаются в смысле Лебега). ■

5.4. Решение неоднородного интегрального уравнения 2-го рода с непрерывным самосопряжённым ядром. Резольвента Фредгольма непрерывного самосопряжённого ядра.

Вернёмся к построению решения уравнения

$$\varphi(x) = \mu \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (5.3) \quad (\varphi = \mu A\varphi + f)$$

с самосопряжённым непрерывным ядром; $A = A^*$. В главе 2 доказано, что если μ — правильное значение, а функция f непрерывна, то существует единственное непрерывное решение φ этого уравнения, которое

даётся формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) f(y) dy,$$

где Γ — резольвента Фредгольма. Что даёт самосопряжённость ядра $\mathcal{K}$ с точки зрения построения этого решения?

Утверждение 5.13.

Пусть в уравнении (5.3) невырожденное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в замкнутом квадрате S . Пусть в этом уравнении функция f непрерывна на $[a, b]$, а μ — правильное значение ядра $\mathcal{K}$. Тогда единственное непрерывное решение φ уравнения (5.3) представляется в виде ряда

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i - \mu} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x), \quad (5.34)$$

где μ_i и $\overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ — характеристические значения и ортонормированные собственные функции ядра $\mathcal{K}$ (см. (5.5)). Функциональный ряд (5.34) сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$. (Формулу (5.34) называют формулой Шмидта.)

Доказательство.

Существование и единственность непрерывного решения φ при любой непрерывной функции f в уравнении (5.3) следует из теоремы 2.2. Применим к функции $(A\varphi)(x)$ теорему Гильберта–Шмидта. Тогда уравнение примет вид (опускаем независимую переменную x)

$$\varphi = \mu A\varphi + f = \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i + f, \quad (5.35)$$

где ряд по собственным функциям $\overset{\circ}{\varphi}_i$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

Найдём коэффициенты Фурье $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i)$ решения. Для этого умножим обе части уравнения (5.3) на $\overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ и проинтегрируем по x на отрезке $[a, b]$. Тогда получим

$$\begin{aligned} (\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) &= \mu \cdot (A\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) + (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) = \\ &= \mu \cdot (\varphi, A\overset{\circ}{\varphi}_i) + (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) = \frac{\mu}{\mu_i} (\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) + (f, \overset{\circ}{\varphi}_i). \end{aligned} \quad (5.36)$$

(здесь использовано $A^* = A$, $\mu_i \in \mathbb{R}$). Отсюда $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu} \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i)$ при всех $i \in \mathbb{N}$, т.к. $\mu \neq \mu_i$. Подставляя найденные коэффициенты Фурье в (5.35), получаем формулу Шмидта (5.34). ■

Если число μ является характеристическим значением ядра $\mathcal{K}$, то по теореме 2.4 уравнение (5.3) разрешимо в том и только в том случае, если его свободный член f ортогонален каждой собственной функции оператора A , отвечающей характеристическому числу μ . Пусть в последовательности характеристических чисел (5.5)

$$\mu = \mu_n = \mu_{n+1} = \dots = \mu_{n+r_n-1},$$

где r_n — ранг (т.е. геометрическая кратность) характеристического значения μ_n . Пусть $(f, \overset{\circ}{\varphi}_{n+l}) = 0$ при всех $l = 0, 1, \dots, r_n - 1$. Как изменится формула Шмидта в этом случае? В таких предположениях уравнение (5.3) имеет бесконечно много непрерывных решений, а его „общее решение“ записывается в виде

$$\varphi(x) = \psi(x) + c_n \cdot \overset{\circ}{\varphi}_n(x) + c_{n+1} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_{n+1}(x) + \dots + c_{n+r_n-1} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_{n+r_n-1}(x),$$

где $\psi(x)$ — некоторое непрерывное частное решение неоднородного уравнения (5.3), а $c_n, \dots, c_{n+r_n-1}$ — произвольные постоянные.

Как и в доказательстве утверждения 5.13, в рассматриваемом случае к функции $(A\varphi)(x)$ можно применить теорему Гильберта–Шмидта и получить равенство (5.35). Но если теперь попытаться найти из уравнения коэффициенты Фурье $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i)$ этого „общего решения“ φ , то для $i = n, \dots, n + r_n - 1$ получим (см. (5.36)) $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = \frac{\mu_i}{\mu_i}(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) + (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i)$, т.е. эти величины произвольны.

Следовательно, и в случае, когда $\mu = \mu_n$ — характеристическое значение геометрической кратности r_n , формула Шмидта остаётся справедливой, но принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) + \mu_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i - \mu_n} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) + \\ & + \sum_{i=n}^{n+r_n-1} c_i \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) + \mu_n \cdot \sum_{i=n+r_n}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i - \mu_n} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x). \end{aligned} \quad (5.37)$$

В случае вырожденного ядра $\mathcal{K}$ в формулах (5.34) и (5.37) суммы конечны.

Замечание 5.15.

Формулы (5.34) и (5.37) дают решение $\varphi \in L_2[a, b]$ и в том случае, когда ядро $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям $\mathcal{K} \in L_2(S)$ и (5.33), а свободный член $f \in L_2[a, b]$. При этом условие (5.33) гарантирует абсолютную и равномерную на $[a, b]$ сходимость рядов в этих формулах. ■

Найдём резольвенту Фредгольма самосопряжённого непрерывного невырожденного ядра $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$. Для этого используем теорему Гильберта–Шмидта и формулу Шмидта.

Напомним сначала известные из главы 2 свойства резольвенты Фредгольма. Резольвента $\Gamma(x, y; \mu)$ существует при каждом правильном значении μ ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Если при данном μ резольвента существует, то она единственна. При любом правильном значении μ резольвента $\Gamma(x, y; \mu)$ является непрерывной функцией двух переменных x и y в замкнутом квадрате S . При фиксированных значениях x и y резольвента является мероморфной аналитической функцией комплексной переменной μ . В случае самосопряжённого ядра $\mathcal{K}$ справедливо равенство $\Gamma(x, y; \mu) = \overline{\Gamma(y, x; \bar{\mu})}$. К каким ещё свойствам резольвенты приводит самосопряжённость ядра $\mathcal{K}$? Можно ли разложить её в ряд Фурье, используя собственные функции (5.5) ядра $\mathcal{K}$?

Для коэффициентов $\frac{1}{\mu_i - \mu}$ формулы Шмидта (5.34) при правильном значении μ применим тождество

$$\frac{1}{\mu_i - \mu} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{\mu}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)}, \quad \mu \neq \mu_i. \quad (5.38)$$

Тогда формула (5.34) примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) + \frac{\mu \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \right],$$

причём ряд сходится абсолютно и равномерно. Рассмотрим отдельно ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x)$. По теореме Гильберта–Шмидта первый из них абсолютно и равномерно сходится к функции $(Af)(x)$, если функция f непрерывна. Для изучения m -ых частичных сумм второго ряда введём временные обозначения

$$\sigma_m(x) = \mu^2 \cdot \sum_{i=1}^m \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x),$$

$$\xi_m(x) = \mu \cdot \sum_{i=1}^m \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i - \mu} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x), \quad \zeta_m(x) = \mu \cdot \sum_{i=1}^m \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x).$$

Тогда по тождеству (5.38) имеем $\sigma_m(x) = \xi_m(x) - \zeta_m(x)$, причём по формуле Шмидта и в силу уравнения (5.3) выполнено $\xi_m(x) \rightrightarrows_{m \rightarrow +\infty} \varphi(x) - f(x) = \mu \cdot (A\varphi)(x)$, а по теореме Гильберта–

Шмидта $\zeta_m(x) \rightrightarrows_{m \rightarrow +\infty} \mu \cdot (Af)(x)$. Поэтому $\sigma_m(x) \rightrightarrows_{m \rightarrow +\infty} \mu \cdot (A(\varphi - f))(x)$

(подчеркнём, что этот факт является следствием формулы Шмидта!). Формулу (5.34) можно теперь записать так:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) + \mu^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i(\mu_i - \mu)} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x) = \\
&= f(x) + \mu \cdot \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \mu^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \overset{\circ}{\varphi}_i)}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Рассмотрим билинейный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \tag{5.40}$$

(сравните его с рядом в правой части (5.39)). По утверждению 5.11 билинейный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i^2} \tag{5.41}$$

сходится абсолютно и равномерно в замкнутом квадрате S ($n = 2$ в этом утверждении). Применим признак сравнения к рядам из модулей членов рядов (5.40) и (5.41):

$$\frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}|}{|\mu_i| \cdot |\mu_i - \mu|} \cdot \left(\frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}|}{\mu_i^2} \right)^{-1} = \left| 1 - \frac{\mu}{\mu_i} \right|^{-1} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 1.$$

По признаку сравнения рядов с положительными членами билинейный ряд (5.40) сходится абсолютно и равномерно на S . Этот ряд можно умножить на непрерывную функцию $f(y)$ и проинтегрировать по y почленно. Тогда формула (5.39) примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \cdot \int_a^b \left[\mathcal{K}(x, y) + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \right] \cdot f(y) dy.$$

В силу единственности резольвенты Фредгольма получаем

$$\Gamma(x, y; \mu) = \mathcal{K}(x, y) + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)}. \tag{5.42}$$

Следствие 5.5.

Резольвента Фредгольма самосопряжённого непрерывного ядра является мероморфной функцией переменной μ , все полюсы μ_i которой имеют **первый** порядок. ■

Задача 5.8.

Найдите вычет резольвенты (5.42) в её полюсе μ_n . ■

Фиксируем произвольное значение $y \in [a, b]$ и найдём коэффициенты Фурье непрерывной по переменной x функции $\Gamma(x, y; \mu)$ по ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ собственных функций ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Для этого умножим равенство (5.42) на непрерывную функцию $\overset{\circ}{\varphi}_n(x)$ и проинтегрируем по x ; при этом функциональный ряд можно интегрировать почленно, т.к. ряд (5.40) сходится равномерно.

$$\begin{aligned} \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx &= \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx + \\ &+ \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \cdot \int_a^b \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx = \int_a^b \overline{\mathcal{K}(y, x)} \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx + \frac{\mu \cdot \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(y)}}{\mu_n \cdot (\mu_n - \mu)} = \\ &= \frac{\overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(y)}}{\mu_n} + \frac{\mu \cdot \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(y)}}{\mu_n \cdot (\mu_n - \mu)} = \frac{\overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(y)}}{\mu_n - \mu} \end{aligned} \quad (5.43)$$

(здесь использована ортонормированность системы $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ и самосопряжённость ядра $\mathcal{K}$). Таким образом, при каждом фиксированном y ряд Фурье функции $\Gamma(x, y; \mu)$ по системе функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ представляет собой билинейный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i - \mu}. \quad (5.44)$$

Очевидно, что если $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)\}$ является ортонормированной системой функций, то и $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ тоже ортонормированная система. Фиксируем произвольное значение $x \in [a, b]$ и найдём коэффициенты Фурье непрерывной по переменной y функции $\Gamma(x, y; \mu)$ по ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)\}$. Для этого умножим равенство (5.42) на непрерывную функцию $\overset{\circ}{\varphi}_n(y)$ и проинтегрируем по y .

$$\begin{aligned} \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) \overset{\circ}{\varphi}_n(y) dy &= \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}_n(y) dy + \\ &+ \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} \cdot \int_a^b \overset{\circ}{\varphi}_i(y) \overset{\circ}{\varphi}_n(y) dy = \frac{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)}{\mu_n} + \frac{\mu \cdot \overset{\circ}{\varphi}_n(x)}{\mu_n \cdot (\mu_n - \mu)} = \frac{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)}{\mu_n - \mu}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Таким образом, при каждом фиксированном x ряд Фурье функции $\Gamma(x, y; \mu)$ по системе функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)\}$ имеет тот же вид (5.44).

Задача 5.9.

Получите коэффициенты Фурье (5.45) из (5.43) и равенства $\Gamma(x, y; \mu) = \overline{\Gamma(y, x; \bar{\mu})}$. ■

Рассмотрим теперь на S систему непрерывных функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(y)\}$ двух переменных. Она является ортонормированной в $L_2(S)$ (проверьте!). Найдём коэффициенты Фурье непрерывной в замкнутом квадрате S функции двух переменных $\Gamma(x, y; \mu)$ по этой системе. Для этого умножим равенство (5.42) на $\overset{\circ}{\varphi}_n(x) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_n(y)$ и проинтегрируем по S ; при этом функциональный ряд можно интегрировать почленно, т.к. ряд (5.40) сходится равномерно на S .

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} \overset{\circ}{\varphi}_n(y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}_n(y) dy \right) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx + \\ &+ \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx \cdot \int_a^b \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)} \overset{\circ}{\varphi}_n(y) dy}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)} = \\ &= \int_a^b \frac{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)}{\mu_n} \cdot \overline{\overset{\circ}{\varphi}_n(x)} dx + \frac{\mu}{\mu_n \cdot (\mu_n - \mu)} = \frac{1}{\mu_n - \mu}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Таким образом, и ряд Фурье функции $\Gamma(x, y; \mu)$ по системе функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overset{\circ}{\varphi}_i(y)\}$ на S является билинейным рядом (5.44).

Замечание 5.16.

Можно доказать, что ряд (5.44) сходится на S в среднем квадратическом к функции $\Gamma(x, y; \mu)$. ■

Замечание 5.17.

При $\mu=0$ ряд (5.44) является билинейным рядом (5.30) ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Сравните этот факт с равенством $\Gamma(x, y; 0) = \mathcal{K}(x, y)$ и со следствием 5.4. ■

Замечание 5.18.

Фиксируем некоторое правильное значение $\mu \in \mathbb{C}$ самосопряжённого ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и рассмотрим ядро $\Gamma(x, y; \mu)$. Равенство (5.45) означает, что ядро $\Gamma(x, y; \mu)$ имеет характеристические значения $\mu_n - \mu$ и отвечающие им собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_n(x)$. ■

Задача 5.10.

Фиксируем некоторое правильное значение $\mu \in \mathbb{C}$ самосопряжённого ядра $\mathcal{K}(x, y)$ и рассмотрим ядро $\Gamma(x, y; \mu)$. При каких μ ядро $\Gamma(x, y; \mu)$ будет самосопряжённым? ■

Следствие 5.6.

В формуле (5.42) положим $y = x$ и проинтегрируем по x на $[a, b]$;

тогда получим выражение следа резольвенты:

$$\int_a^b \Gamma(x, x; \mu) dx = \text{tr} \mathcal{K} + \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i \cdot (\mu_i - \mu)}. \blacksquare$$

5.5. Экстремальные свойства характеристических значений и собственных функций вполне непрерывного самосопряжённого линейного интегрального оператора. Неотрицательные и положительно определённые операторы. Теорема Мерсера.

5.5.1. Экстремальное свойство модуля характеристического числа.

Основные утверждения данной главы опираются на теорему 4.3 о существовании характеристического числа у вполне непрерывного самосопряжённого линейного оператора $A \neq 0$:

$$\frac{1}{|\mu_1|} = |\lambda_1| = \|A\| = \max_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)|. \quad (5.47)$$

Важно, что максимум достигается на нормированном собственном векторе, отвечающем характеристическому значению μ_1 . Этот факт позволяет строить методы приближённого нахождения характеристических чисел μ_j и отвечающих им собственных функций изученного в данной главе интегрального оператора A , действующего в пространстве $L_2[a, b]$ (см. [8, 17]). В разделе 5.1 формулой (5.8) введены интегральные операторы $A^{(j)}$, для которых выполнено неравенство (5.9). Из этого неравенства имеем по определению нормы оператора $A^{(j)}$:

$$\|A^{(j)}\| = \sup_{\omega \neq 0} \frac{\|A^{(j)}\omega\|_{L_2[a, b]}}{\|\omega\|_{L_2[a, b]}} \leq \frac{1}{|\mu_{j+1}|}. \quad (5.48)$$

В утверждении 5.8 доказано, что μ_{j+1} является характеристическим числом оператора $A^{(j)}$, ему соответствует нормированная собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}_{j+1}(x)$. Поэтому в (5.48) имеет место равенство, и точная верхняя грань достигается на функции $\overset{\circ}{\varphi}_{j+1}(x)$. Кроме того, оператор $A^{(j)}$ самосопряжённый, поэтому

$$\|A^{(j)}\| = \max_{\omega \neq 0} \frac{\|A^{(j)}\omega\|_{L_2[a, b]}}{\|\omega\|_{L_2[a, b]}} = \max_{\|\omega\|=1} |(A^{(j)}\omega, \omega)| = \frac{1}{\mu_{j+1}}. \quad (5.49)$$

Введём множество $H^{(j)}$ всех функций $\omega \in L_2[a, b]$, которые ортогональны каждой из собственных функций $\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_j$ оператора A (см.

(5.5)). Это множество является ортогональным дополнением линейной оболочки $\mathbb{L}(\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_j)$ до всего пространства $L_2[a, b]$. Рассмотрим оператор A только на $H^{(j)}$. На множестве $H^{(j)}$ операторы A и $A^{(j)}$ совпадают. Поэтому при любом $j \in \mathbb{N}$ равенство (5.49) можно записать в виде

$$\frac{1}{|\mu_{j+1}|} = \max_{\substack{\omega \in H^{(j)} \\ \|\omega\|=1}} |(A\omega, \omega)|. \quad (5.50)$$

Если считать, что $H^{(0)} = L_2[a, b]$, то формула (5.50) включает в себя и формулу (5.47). Важно, что максимум в (5.50) достигается на собственной функции $\overset{\circ}{\varphi}_{j+1}$ оператора A . Поэтому метод приближённого нахождения чисел μ_j и функций $\overset{\circ}{\varphi}_j$ может быть основан на приближённом решении экстремальной задачи $|(A\omega, \omega)| \rightarrow \max$ при указанных в (5.50) ограничениях. Недостаток такого подхода в том, что формула (5.50) не учитывает знаки характеристических чисел.

Для обоснования указанных приближённых методов, а также для доказательства равномерной сходимости билинейного ряда (5.30) (т.е. билинейного ряда ядра $\mathcal{K}(x, y)$) существенную роль играет предположение о знакоопределённости интегрального оператора с ядром $\mathcal{K}(x, y)$. У таких операторов все характеристические числа имеют один и тот же знак. Рассмотрим этот важный класс самосопряжённых операторов, действующих в $L_2[a, b]$, и изучим некоторые их свойства.

5.5.2. Неотрицательный линейный оператор. Экстремальное свойство его характеристического числа.

Скалярное произведение $(A\varphi, \psi)$ называют билинейной формой, порождённой оператором A , если пространство $L_2[a, b]$ действительное, и полуторалинейной формой, если это пространство комплексное (дело в том, что $(A\varphi, \alpha\psi) = \bar{\alpha} \cdot (A\varphi, \psi)$ для $\alpha \in \mathbb{C}$). Скалярное произведение $(A\varphi, \varphi)$ называют квадратичной формой, порождённой оператором A .

Утверждение 5.14.

Линейный оператор A , действующий в комплексном евклидовом пространстве, является самосопряжённым в том и только в том случае, если порождённая им квадратичная форма $(A\varphi, \varphi)$ принимает только действительные значения.

Доказательство.

Если $A = A^*$, то по определению $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для любых φ и ψ из области определения оператора $Dom A$. Поэтому при $\psi = \varphi$ имеем $(A\varphi, \varphi) = \overline{(\varphi, A\varphi)} = \overline{(A\varphi, \varphi)}$, т.е. число $(A\varphi, \varphi)$ действительное.

Пусть теперь $(A\varphi, \varphi)$ принимает только действительные значения. Докажем, что тогда $A = A^*$. Для всех φ и ψ , принадлежащих $Dom A$,

выражения $(A\varphi, \varphi)$, $(A\psi, \psi)$ и $(A(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi)$ действительны, причём $(A(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi) = (A\varphi, \varphi) + i(A\psi, \varphi) - i(A\varphi, \psi) + (A\psi, \psi)$. Поэтому $\operatorname{Re}[(A\psi, \varphi) - (A\varphi, \psi)] = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i}\left[(A(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi) - (A\varphi, \varphi) - (A\psi, \psi)\right]\right\} = 0$ т.к. выражение в фигурных скобках чисто мнимое. Аналогично $\operatorname{Im}[(A\psi, \varphi) + (A\varphi, \psi)] = \operatorname{Im}\left[(A(\varphi + \psi), \varphi + \psi) - (A\varphi, \varphi) - (A\psi, \psi)\right] = 0$, т.к. выражение в квадратных скобках действительное. Отсюда получаем $(A\varphi, \psi) = \operatorname{Re}(A\varphi, \psi) + i \cdot \operatorname{Im}(A\varphi, \psi) = \operatorname{Re}(A\psi, \varphi) - i \cdot \operatorname{Im}(A\psi, \varphi) = \overline{(A\psi, \varphi)} = (\varphi, A\psi)$, т.е. $A = A^*$ ■

Определение 5.2.

Линейный оператор A называют неотрицательным, если $(A\varphi, \varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \operatorname{Dom} A$. (Символическое обозначение: $A \geq 0$.)

Линейный оператор называют положительно определённым, если он неотрицательный, и $(A\varphi, \varphi) = 0$ в том и только в том случае, когда $\varphi = 0$. (Символическое обозначение: $A > 0$.) ■

Следствие 5.7.

Неотрицательный линейный оператор является самосопряжённым. ■

Следствие 5.8.

Пусть линейный оператор A является самосопряжённым, и пусть он имеет собственные значения. Тогда $A \geq 0$ в том и только в том случае, если все его собственные значения $\lambda \geq 0$; $A > 0$ в том и только в том случае, если все его собственные значения $\lambda > 0$.

Доказательство.

Пусть φ — нормированный собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению λ . Тогда $(A\varphi, \varphi) = (\lambda\varphi, \varphi) = \lambda(\varphi, \varphi) = \lambda \cdot \|\varphi\|^2 = \lambda$. ■

Поскольку все характеристические значения неотрицательного оператора положительны, из (5.50) получаем следующий вариационный принцип.

Утверждение 5.15.

Пусть непрерывное в замкнутом квадрате S самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и определяет интегральный оператор $A = A^* \geq 0$. Пусть $H^{(j)}$ — ортогональное дополнение линейной оболочки $\mathbb{L}(\overset{\circ}{\varphi}_1, \dots, \overset{\circ}{\varphi}_j)$ до всего пространства $L_2[a, b]$; $H^{(0)} = L_2[a, b]$. Тогда для $j = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула

$$\frac{1}{\mu_{j+1}} = \max_{\substack{\omega \in H^{(j)} \\ \|\omega\|=1}} (A\omega, \omega). \quad (5.51)$$

Максимум в формуле (5.51) достигается на собственной функции $\overset{\circ}{\varphi}_{j+1}$ оператора A . ■

5.5.3. Положительное симметричное ядро. Свойства характеристического числа с наименьшим модулем и отвечающей ему собственной функции.

Рассмотрим теперь случай, когда интегральный оператор A определён действительным симметричным ядром, все значения которого положительны: $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x) > 0$ в квадрате S . Для такого ядра все его итерированные ядра $\mathcal{K}_n(x, y)$ также положительны (см. формулу (2.19)).

Утверждение 5.16.

Пусть непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x) > 0$ в замкнутом квадрате S . Тогда его характеристическое число $\mu_1 > 0$ и имеет геометрическую кратность 1. Собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}_1(x)$ может быть выбрана положительной на $[a, b]$.

Доказательство.

По утверждению 5.5 все собственные функции действительного симметричного ядра можно выбрать действительными. Пусть $\overset{\circ}{\varphi}_1$ — произвольная действительная нормированная собственная функция ядра $\mathcal{K}$, соответствующая наименьшему по модулю его характеристическому числу μ_1 : $\overset{\circ}{\varphi}_1 = \mu_1 \cdot A\overset{\circ}{\varphi}_1$, $\|\overset{\circ}{\varphi}_1\| = 1$. Тогда по утверждению 2.4 число μ_1^2 является наименьшим характеристическим числом положительного ядра $\mathcal{K}_2(x, y)$, и ему отвечает та же собственная функция: $\overset{\circ}{\varphi}_1 = \mu_1^2 \cdot A^2\overset{\circ}{\varphi}_1$. Оператор A^2 самосопряжённый, и для него справедлива формула (5.47):

$$\frac{1}{\mu_1^2} = \max_{\|\varphi\|=1} |(A^2\varphi, \varphi)|. \quad (5.52)$$

Докажем, что функция $\overset{\circ}{\varphi}_1(x)$ не может менять знак на $[a, b]$, т.е. $|\overset{\circ}{\varphi}_1(x) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_1(y)| = \overset{\circ}{\varphi}_1(x) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_1(y)$ для всех $x \in [a, b]$ и всех $y \in [a, b]$. Предположим противное: пусть для некоторых x' и y' значения $\overset{\circ}{\varphi}_1(x')$ и $\overset{\circ}{\varphi}_1(y')$ имеют разные знаки. Тогда $|\overset{\circ}{\varphi}_1(x') \cdot \overset{\circ}{\varphi}_1(y')| > \overset{\circ}{\varphi}_1(x') \cdot \overset{\circ}{\varphi}_1(y')$. В силу непрерывности функции $\overset{\circ}{\varphi}_1(x)$ (см. утверждение 5.6) найдутся такие окрестности $G(x')$ и $G(y')$ точек x' и y' , что для всех $x \in G(x')$ и всех $y \in G(y')$ будет выполнено неравенство $|\overset{\circ}{\varphi}_1(x)| \cdot |\overset{\circ}{\varphi}_1(y)| > \overset{\circ}{\varphi}_1(x) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_1(y)$. Отсюда для функции $|\overset{\circ}{\varphi}_1(x)|$ из условия $\mathcal{K}_2(x, y) > 0$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} (A^2|\overset{\circ}{\varphi}_1|, |\overset{\circ}{\varphi}_1|) &= \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}_2(x, y) \cdot |\overset{\circ}{\varphi}_1(y)| dy \right) \cdot |\overset{\circ}{\varphi}_1(x)| dx > \\ &> \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}_2(x, y) \overset{\circ}{\varphi}_1(y) dy \right) \overset{\circ}{\varphi}_1(x) dx = (A^2\overset{\circ}{\varphi}_1, \overset{\circ}{\varphi}_1) = \frac{1}{\mu_1^2}. \end{aligned} \quad \text{Это противоречит равенству (5.52).}$$

Докажем, что функция $\overset{\circ}{\varphi}_1$ не обращается в нуль на $[a, b]$. Это следует из того, что $\overset{\circ}{\varphi}_1(x) = \mu_1^2 \cdot \int_a^b \mathcal{K}_2(x, y) \overset{\circ}{\varphi}_1(y) dy$ при всех $x \in [a, b]$, $\mathcal{K}_2(x, y) > 0$ в S , а функция $\overset{\circ}{\varphi}_1(y) \geq 0$ на $[a, b]$ или $\overset{\circ}{\varphi}_1(y) \leq 0$ на $[a, b]$; поэтому если в некоторой точке x' было бы $\overset{\circ}{\varphi}_1(x') = 0$, то $\overset{\circ}{\varphi}_1(y) \equiv 0$. Итак, собственную функцию $\overset{\circ}{\varphi}_1(x)$ можно выбрать положительной на $[a, b]$.

Теперь ясно, что $\mu_1 > 0$. Действительно, $\overset{\circ}{\varphi}_1(x) = \mu_1 \cdot \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \overset{\circ}{\varphi}_1(y) dy$, где $\mathcal{K}(x, y) > 0$ в S и $\overset{\circ}{\varphi}_1(y) > 0$ на $[a, b]$; поэтому $\mu_1 > 0$.

Докажем, что характеристическое число μ_1 ядра $\mathcal{K}$ имеет равную 1 геометрическую кратность. Пусть числу μ_1 соответствует ещё одна действительная собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}_2$, линейно независимая с $\overset{\circ}{\varphi}_1$. (Функцию $\overset{\circ}{\varphi}_2$ тоже можно выбрать нормированной.) Как было доказано, можно считать, что $\overset{\circ}{\varphi}_2(x) > 0$ на $[a, b]$. При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\overset{\circ}{\varphi}_1 + \alpha \overset{\circ}{\varphi}_2$ также будет действительной собственной функцией ядра $\mathcal{K}$, отвечающей характеристическому числу μ_1 . По доказанному выше она не может обращаться в нуль на $[a, b]$; но это противоречит произвольности коэффициента α . ■

5.5.4. Достаточное условие регулярной сходимости билинейного ряда самосопряжённого ядра.

Вернёмся к изучению характера сходимости билинейного ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \cdot \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i} \quad (5.30)$$

ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Если невырожденное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в квадрате S , то ряд (5.30) сходится к функции $\mathcal{K}(x, y)$ в среднем квадратическом на S (см. следствие 5.4). Оказывается, что если это ядро определяет неотрицательный интегральный оператор, то ряд (5.30) сходится равномерно на S к функции $\mathcal{K}(x, y)$.

Теорема 5.4 (теорема Мерсера).

Пусть невырожденное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в замкнутом квадрате S . Пусть определённый ядром $\mathcal{K}$ интегральный оператор $A = A^* \geq 0$. Тогда билинейный ряд (5.30) сходится к ядру $\mathcal{K}(x, y)$ абсолютно и равномерно на S . ■

Для доказательства теоремы докажем сначала следующую лемму.

Лемма 5.1.

Если интегральный оператор A неотрицательный, а его ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате S , то $\mathcal{K}(x, x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство.

По следствию 5.7 $A = A^*$, поэтому $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$. Тогда функция $\mathcal{K}(x, x)$ принимает действительные значения, т.к. $\mathcal{K}(x, x) = \overline{\mathcal{K}(x, x)}$.

Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ выполнено неравенство $\mathcal{K}(x_0, x_0) < 0$. Тогда в силу непрерывности ядра $\mathcal{K}$ найдётся такое число $\delta > 0$, что при $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ и при $x_0 - \delta \leq y \leq x_0 + \delta$ будут выполнены условия $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$, $\operatorname{Re} \mathcal{K}(x, y) < 0$. (Если x_0 является концом отрезка $[a, b]$, то надо рассматривать полуокрестности.) Выберем непрерывную действительную функцию $\varphi(x)$, для которой $\varphi(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x - x_0| \geq \delta$. На такой

функции квадратичная форма $(A\varphi, \varphi) = \int_a^b \left(\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right) \cdot \varphi(x) dx$ принимает действительное значение, т.к. $A = A^*$. Поэтому

$(A\varphi, \varphi) = \int_a^b \left(\int_a^b \operatorname{Re} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right) \cdot \varphi(x) dx < 0$. Это противоречит неотрицательности оператора A . ■

Доказательство теоремы 5.4.

Снова используем самосопряжённые интегральные операторы $A^{(j)}$ с ядрами $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$ (см. формулы (5.7) и (5.8)). Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывное и самосопряжённое, поэтому и ядра $\mathcal{K}^{(j)}(x, y)$ непрерывные и самосопряжённые. Поскольку оператор $A \geq 0$, все его характеристические числа $\mu_i > 0$; поэтому и операторы $A^{(j)} \geq 0$ (см. следствие 5.8; см. утверждение 5.8).

По лемме 5.1 ядра $\mathcal{K}^{(j)}$ удовлетворяют условию $\mathcal{K}^{(j)}(x, x) \geq 0$ при всех $x \in [a, b]$. Введём обозначение $M = \max_{(x, y) \in S} |\mathcal{K}(x, y)|$. В формуле (5.7) положим $y = x$; тогда при всех $j \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$\sum_{i=1}^j \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i} \leq \mathcal{K}(x, x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i}$ сходится при каждом $x \in [a, b]$, т.к. все $\mu_i > 0$, и частичные суммы этого ряда с неотрицательными членами ограничены. Тогда по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon, x)$, что при всех номерах $n \geq N$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i} < \frac{\varepsilon^2}{M}. \quad (5.53)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)| \cdot \overline{|\overset{\circ}{\varphi}_i(y)|}}{\mu_i} \quad (5.54)$$

и оценим сумму $\sum_{i=n}^{n+p}$ его членов. По числовому неравенству Коши–Буняковского получаем

$$\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)| \cdot \overline{|\overset{\circ}{\varphi}_i(y)|}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_i}} \leq \left(\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(y)|^2}{\mu_i} \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad (5.55)$$

при $n \geq N(\varepsilon, x)$ — в силу неравенства (5.53) и неравенства $\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(y)|^2}{\mu_i} \leq M$. По критерию Коши равномерной сходимости функциональный ряд (5.54) сходится при каждом фиксированном x равномерно по y на $[a, b]$. Это же верно для самого билинейного ряда (5.30). Поэтому при каждом фиксированном x билинейный ряд (5.30) равномерно по y на $[a, b]$ сходится к функции, непрерывной по y (т.к. все $\overset{\circ}{\varphi}_i(y)$ непрерывны). Кроме того, при каждом фиксированном x билинейный ряд (5.30) сходится в среднем квадратическом по переменной y именно к функции $\mathcal{K}(x, y)$ (см. утверждение 5.12 и замечание 5.10). Отсюда следует, что билинейный ряд (5.30) при фиксированном x равномерно сходится именно к функции $\mathcal{K}(x, y)$ (доказательство проводится как в доказательстве теоремы 5.2).

Итак, при фиксированном x для всех $y \in [a, b]$ имеем

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}}{\mu_i}. \quad (5.56)$$

Положим $y = x$ в равенстве (5.56); тогда получим

$$\mathcal{K}(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}_i(x)|^2}{\mu_i}, \quad (5.57)$$

где $\mathcal{K}(x, x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Ряд (5.57) допускает применение признака равномерной сходимости Дини: все члены этого ряда непрерывны и неотрицательны на отрезке $a \leq x \leq b$, его сумма непрерывна на этом отрезке; поэтому функциональный ряд (5.57) сходится к своей сумме равномерно на указанном отрезке. Следовательно, по критерию Коши равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$ (N не зависит от x !), что при всех номерах $n \geq N$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство (5.53).

Тогда из оценки (5.55) получаем регулярную сходимость билинейного ряда (5.30) по совокупности переменных x и y в квадрате S . Это и означает, что билинейный ряд сходится абсолютно и равномерно на S , и его сумма равна $\mathcal{K}(x, y)$ (см. (5.56)). ■

Следствие 5.9.

В условиях теоремы 5.4 справедливо равенство

$$\operatorname{tr} \mathcal{K} = \int_a^b \mathcal{K}(x, x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i}.$$

Доказательство следует из формулы (5.57). ■

Замечание 5.19.

Теорема Мерсера остаётся верной и в том случае, если оператор A имеет отрицательные характеристические значения, но их число конечно. ■

5.6. Самосопряжённые краевые задачи. Задача Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова*.

5.6.1. Самосопряжённые краевые задачи на собственные значения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть при $j = 0, 1, \dots, n$ даны комплекснозначные функции $p_j \in C^{n-j}[a, b]$, причём $p_0(x)$ не обращается в нуль на $[a, b]$. Введём линейное дифференциальное выражение

$$(L\varphi)(x) = p_0(x)\varphi^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)\varphi(x).$$

Пусть, кроме того, при $j = 1, \dots, n$ имеются выражения

$$\delta_j(\varphi) = \sum_{k=1}^n \left(u_{jk} \cdot \varphi^{(k-1)}(a) + v_{jk} \cdot \varphi^{(k-1)}(b) \right),$$

где u_{jk} и v_{jk} — заданные постоянные. Обозначим систему всех соотношений $\delta_j(\varphi) = 0$, $j = 1, \dots, n$, через $\delta(\varphi) = 0$. Этим определён линейный дифференциальный оператор L , областью определения $\operatorname{Dom} L$ которого является множество всех функций $\varphi \in C^n[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям $\delta(\varphi) = 0$. На том же множестве функций можно определить дифференциальный оператор, сопряжённый оператору L .

Задачу с параметром μ

$$\begin{cases} (L\varphi)(x) = \mu \cdot \varphi(x), & a \leq x \leq b, \\ \delta(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (5.58)$$

* Стеклов Владимир Андреевич (1863–1926) — русский математик.

называют краевой задачей на собственные значения. Если число $\mu \in \mathbb{C}$ таково, что задача (5.58) имеет нетривиальное решение $\overset{\circ}{\varphi}$, то такое значение параметра μ называют собственным значением этой задачи, а функцию $\overset{\circ}{\varphi}$ — её собственной функцией. Если для любых функций φ и ψ , принадлежащих $Dom L$, выполнено равенство скалярных произведений

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi), \quad (5.59)$$

то задачу (5.58) называют самосопряжённой.

Если в выражении $\delta_j(\varphi)$ либо все постоянные $u_{jk} = 0$, либо все $v_{jk} = 0$, то краевое условие $\delta_j(\varphi) = 0$ называют разделённым. Если же $\delta_j(\varphi)$ содержит некоторые постоянные $u_{jk} \neq 0$ и некоторые $v_{jk} \neq 0$, то краевое условие $\delta_j(\varphi) = 0$ называют неразделённым.

В курсе „Обыкновенные дифференциальные уравнения“ для дифференциального оператора L второго порядка с разделёнными краевыми условиями была введена функция Грина и указан способ её построения в случае, когда $\mu = 0$ не является собственным значением задачи (5.58). Аналогичным образом можно определить функцию Грина и для дифференциального оператора n -го порядка (см. Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Гл.7, §2). Решение неоднородной задачи

$$\begin{cases} (L\varphi)(x) = \mu \cdot \varphi(x) + f(x), & a \leq x \leq b; \quad f \in C[a, b]; \\ \delta(\varphi) = 0 \end{cases}$$

выражается через функцию Грина $G(x, y; \mu)$ по формуле
$$\varphi(x) = \int_a^b G(x, y; \mu) f(y) dy$$
 для всех μ , не являющихся собственными значениями задачи (5.58). При фиксированных x и y функция G мероморфна по переменной μ .

Предположим, что задача (5.58) самосопряжённая, и что число $\mu = 0$ не является её собственным значением. Последнее предположение не ограничивает общности рассуждений, т.к. в любом случае существует действительная постоянная $(-c)$, не являющаяся собственным значением. Поэтому можно ввести оператор $L_c\varphi = L\varphi + c \cdot \varphi$ и рассмотреть задачу с параметром ν :

$$L_c\varphi = \nu \cdot \varphi, \quad \delta(\varphi) = 0. \quad (5.60)$$

Эта задача тоже самосопряжённая, т.к. $(c \cdot \varphi, \psi) = (\varphi, c \cdot \psi)$. Если ν — собственное значение задачи (5.60), то $\nu - c$ будет собственным значением задачи (5.58), и наоборот. Собственные функции задач (5.58) и (5.60) одинаковы.

Поскольку $\mu = 0$ не является собственным значением задачи (5.58), функция $G(x, y; 0)$ существует; её обозначают через $G(x, y)$. Тогда ре-

шение задачи

$$\begin{cases} (L\varphi)(x) = f(x), & a \leq x \leq b; f \in C[a, b]; \\ \delta(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

имеет вид $\varphi(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy$. Заменяя в (5.61) функцию $f(x)$ на $\mu \cdot \varphi(x)$, получаем эквивалентное задаче (5.58) однородное интегральное уравнение $\varphi(x) = \mu \cdot \int_a^b G(x, y)\varphi(y)dy$. Интегральный опера-

тор $(A\varphi)(x) = \int_a^b G(x, y)\varphi(y)dy$ является обратным к оператору L в том смысле, что справедливы равенство $LA\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in C[a, b]$ и равенство $AL\varphi = \varphi$ для всех $\varphi \in Dom L$.

Полагая в (5.59) $\varphi = A\xi$, $\psi = A\zeta$, где $\xi, \zeta \in C[a, b]$, получим $(\xi, A\zeta) = (A\xi, \zeta)$; отсюда $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$.

Пример 5.3.

$(L\varphi)(x) = i \cdot \varphi'(x)$, $\delta(\varphi) = \varphi(0) - \varphi(1)$. Областью определения дифференциального оператора L являются все функции $\varphi \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющие неразделённому краевому условию $\varphi(0) - \varphi(1) = 0$. Задача на собственные значения

$$i \cdot \varphi'(x) = \mu \cdot \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \varphi(0) = \varphi(1) \quad (5.62)$$

самосопряжённая (проверьте!). Общее решение дифференциального уравнения с параметром μ имеет вид $\varphi(x) = c \cdot e^{-i\mu x}$, $c = const$. Из краевого условия $\delta(\varphi) = 0$ получаем $c = c \cdot e^{-i\mu}$, т.е. $\mu_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, —собственные значения. Система собственных функций $\overset{\circ}{\varphi}_k(x) = \exp(-i \cdot 2\pi kx)$ ортонормированная:

$$\int_0^1 \overset{\circ}{\varphi}_k(x) \overline{\overset{\circ}{\varphi}_m(x)} dx = \begin{cases} 0, & k \neq m; \\ 1, & k = m \end{cases} \quad (\text{проверьте!}).$$

При $\mu \neq \mu_k$ существует функция Грина краевой задачи (5.62):

$$G(x, y; \mu) = \begin{cases} \frac{i \cdot e^{i\mu(y-x)}}{1 - e^{i\mu}}, & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ \frac{i \cdot e^{i\mu(1+y-x)}}{1 - e^{i\mu}}, & 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Заметьте, что функция Грина задачи (5.62) при $x = y$ двузначна. Проверьте, что $G(x, y; \mu) = \overline{G(y, x; \bar{\mu})}$.

Проверьте, что при $\mu \neq \mu_k$ решение задачи $i \cdot \varphi'(x) = \mu \cdot \varphi(x) + f(x)$, $0 \leq x \leq 1$; $f \in C[0, 1]$; $\varphi(0) = \varphi(1)$ можно записать в виде $\varphi(x) = \int_0^1 G(x, y; \mu) f(y) dy$.

Поскольку число $\mu_0 = 0$ является собственным значением задачи (5.62), можно вместо этой задачи рассмотреть задачу

$$L_1 \varphi(x) \equiv i \cdot \varphi'(x) + \varphi(x) = \nu \cdot \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad (5.63)$$

которая имеет собственные значения $\nu_k = 2\pi k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Число $\nu = 0$ не будет теперь собственным значением задачи (5.63). При $\nu \neq \nu_k$ существует функция Грина $G_1(x, y; \nu)$ краевой задачи (5.63). Поэтому задача (5.63) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \nu \cdot \int_0^1 G_1(x, y; 0) \varphi(y) dy. \quad \text{Поскольку } Dom L_1 = Dom L, \text{ задача (5.63) эквивалентна задаче (5.62) при } \nu = \mu + 1. \text{ Следовательно, задача (5.62) эквивалентна интегральному уравнению}$$

$$\varphi(x) = (\mu + 1) \cdot \int_0^1 G_1(x, y; 0) \varphi(y) dy. \blacksquare$$

Пример 5.4.

$$(L\varphi)(x) = -\varphi''(x), \quad \delta_1(\varphi) = \varphi(0), \quad \delta_2(\varphi) = \varphi(1).$$

Областью определения дифференциального оператора L являются все функции $\varphi \in C^2[0, 1]$, удовлетворяющие разделённым краевым условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 0$. Задача на собственные значения

$$-\varphi''(x) = \mu \cdot \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \quad (5.64)$$

самосопряжённая (проверьте!). Поэтому все её собственные значения действительны. Их легко найти: $\mu_k = (\pi k)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Система собственных функций $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(\pi k x)$ ортонормированная (проверьте!).

При $\mu \neq \mu_k$ существует функция Грина краевой задачи (5.64):

$$G(x, y; \mu) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\mu}x) \cdot \sin(\sqrt{\mu}(1-y))}{\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}}, & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ \frac{\sin(\sqrt{\mu}y) \cdot \sin(\sqrt{\mu}(1-x))}{\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}}, & 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$$

здесь $\mu \in \mathbb{C}$. Поскольку $\mu = 0$ не является собственным значением задачи (5.64), существует

$$G(x, y) = G(x, y; 0) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ y(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$$

(проверьте методом построения функции $G(x, y)$, указанным в курсе „Обыкновенные дифференциальные уравнения“).

Проверьте, что при $\mu = 0$ решение задачи

$$-\varphi''(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad f \in C[0, 1]; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0$$

можно записать в виде $\varphi(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy$.

Задача (5.64) эквивалентна интегральному уравнению $\varphi(x) = \mu \int_0^1 G(x, y) \varphi(y) dy$ с симметричным ядром. Все его характеристические числа $\mu_k > 0$, поэтому интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_0^1 G(x, y) \varphi(y) dy$ неотрицательный. По теореме Мерсера получаем

$$G(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k x) \cdot \sin(\pi k y)}{k^2},$$

причём билинейный ряд сходится регулярно в квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. ■

5.6.2. Задача Штурма–Лиувилля.

В курсе „Обыкновенные дифференциальные уравнения“ была изучена задача Штурма–Лиувилля и установлены некоторые её свойства. Покажем, что эта задача эквивалентна однородному линейному интегральному уравнению 2-го рода с симметричным ядром, из которого и следуют все основные её свойства. Задачу Штурма–Лиувилля рассмотрим в следующей постановке (ср. с примером 1.2):

$$(L\varphi)(x) = \mu \cdot \varphi(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \delta(\varphi) = 0, \quad (5.65)$$

где $(L\varphi)(x) = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) + q(x) \varphi(x)$; $\delta_1(\varphi) = h_1 \cdot \varphi(a) - h_2 \cdot \varphi'(a)$, $\delta_2(\varphi) = H_1 \cdot \varphi(b) + H_2 \cdot \varphi'(b)$; $p \in C^1[a, b]$, $p(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$; $q \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0$ при $a \leq x \leq b$; $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$; $H_1 \geq 0$, $H_2 \geq 0$, $H_1 + H_2 > 0$. Областью определения дифференциального оператора L считаем все функции $\varphi \in C^2[a, b]$, удовлетворяющие краевым условиям $\delta(\varphi) = 0$. $\mu \in \mathbb{C}$.

При указанных требованиях к функциям p , q и к краевым условиям задача на собственные значения (5.65) сведётся к интегральному уравнению со знакоопределённым оператором.

Докажем, что дифференциальный оператор L на своей области определения является самосопряжённым и неотрицательным; тем самым задача (5.65) самосопряжённая. Пусть $\varphi \in Dom L$, $\psi \in C^1[a, b]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}(L\varphi, \psi) &= \int_a^b (L\varphi)(x) \cdot \overline{\psi(x)} dx = \int_a^b \left[-(p(x) \cdot \varphi'(x))' + q(x)\varphi(x) \right] \cdot \overline{\psi(x)} dx = \\ &= \int_a^b q(x)\varphi(x) \overline{\psi(x)} dx - \int_a^b \overline{\psi(x)} d(p(x)\varphi'(x)) = \\ &= \int_a^b q(x)\varphi(x) \overline{\psi(x)} dx - p(x)\varphi'(x) \overline{\psi(x)} \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b p(x)\varphi'(x) \overline{\psi'(x)} dx.\end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение квадратичной формы, порождённой оператором L :

$$(L\varphi, \varphi) = \int_a^b \left(p(x)|\varphi'(x)|^2 + q(x)|\varphi(x)|^2 \right) dx - p(x) \overline{\varphi(x)} \varphi'(x) \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (5.66)$$

Если $h_2 \neq 0$, то $\varphi'(a) = \frac{h_1}{h_2} \cdot \varphi(a)$. Если $h_2 = 0$, то $\varphi(a) = 0$. Если $H_2 \neq 0$, то $\varphi'(b) = -\frac{H_1}{H_2} \cdot \varphi(b)$. Если $H_2 = 0$, то $\varphi(b) = 0$. Поэтому во всех случаях $p(x) \overline{\varphi(x)} \varphi'(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \leq 0$ (проверьте!). Следовательно, для всех $\varphi \in Dom L$ выполнено неравенство $(L\varphi, \varphi) \geq 0$. По следствию 5.7 линейный оператор L является самосопряжённым.

Утверждение 5.17.

Число $\mu = 0$ является собственным значением задачи (5.65) в том, и только в том случае, если $q(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и $h_1 = H_1 = 0$. При этом собственное значение $\mu = 0$ имеет геометрическую кратность 1, и ему соответствует собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv const \neq 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\mu = 0$ является собственным значением задачи (5.65), и ему отвечает собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}(x)$, т.е. $(L\overset{\circ}{\varphi})(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Тогда $(L\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\varphi}) = 0$, и из формулы (5.66) следует $\overset{\circ}{\varphi}'(x) \equiv 0$ и $q(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Поэтому $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv const \neq 0$. Из краевого условия получаем $h_1 = 0$, т.к. $\overset{\circ}{\varphi}(a) \neq 0$, $\overset{\circ}{\varphi}'(a) = 0$; аналогично $H_1 = 0$, т.к. $\overset{\circ}{\varphi}(b) \neq 0$, $\overset{\circ}{\varphi}'(b) = 0$.

Достаточность. Пусть $q(x) \equiv 0$, $h_1 = H_1 = 0$. Тогда $h_2 > 0$, $H_2 > 0$, и задача (5.65) имеет вид

$$-\left(p(x)\varphi'(x)\right)' = \mu \cdot \varphi(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \varphi'(a) = 0, \quad \varphi'(b) = 0.$$

Очевидно, что при $\mu = 0$ функция $\varphi(x) \equiv \text{const} \neq 0$ будет собственной функцией этой задачи.

Осталось доказать, что краевая задача

$$-\left(p(x)\varphi'(x)\right)' = 0, \quad a \leq x \leq b; \quad \varphi'(a) = 0, \quad \varphi'(b) = 0$$

имеет только решение $\varphi(x) \equiv \text{const}$. Действительно, $p(x)\varphi'(x) \equiv \text{const}$, $p(a) > 0$, $\varphi'(a) = 0$; отсюда $\varphi'(x) \equiv 0$. ■

Пусть $\mu = 0$ не является собственным значением задачи (5.65); это значит, что либо $q(x) \not\equiv 0$, либо $h_1 \neq 0$, либо $H_1 \neq 0$. Рассмотрим краевую задачу

$$(L\varphi)(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b; \quad f \in C[a, b]; \quad \delta(\varphi) = 0 \quad (5.67)$$

и напомним определение её функции Грина.

Определение 5.3.

Функцию $G(x, y)$ называют функцией Грина краевой задачи (5.67), если она определена в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ и удовлетворяет следующим условиям.

1°. Для любого $y \in (a, b)$ функция $G(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x на множестве $[a, y) \cup (y, b]$ и удовлетворяет однородному уравнению $(LG)(x) = 0$ по переменной x при $a \leq x \leq b$, $x \neq y$.

2°. Для любого $y \in (a, b)$ функция $G(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям $\delta(G) = 0$ по переменной x .

3°. Функция $G(x, y)$ непрерывна в замкнутом квадрате S , а частная производная $G'_x(x, y)$ при $x = y$ имеет конечные предельные значения

$$G'_x(y+0, y) = \lim_{x \rightarrow y+0} G'_x(x, y), \quad G'_x(y-0, y) = \lim_{x \rightarrow y-0} G'_x(x, y),$$

которые связаны соотношением

$$G'_x(y+0, y) - G'_x(y-0, y) = \frac{(-1)}{p(y)} \quad \text{при любом } y \in (a, b). \quad \blacksquare$$

В сделанном предположении однородная краевая задача ($f(x) \equiv 0$ в (5.67)) имеет только нулевое решение. Поэтому функция Грина задачи (5.67) существует и единственна; решение неоднородной задачи (5.67)

существует, единственно и даётся формулой $\varphi(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy$,

$a \leq x \leq b$. Функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \cdot \begin{cases} \xi(x)\zeta(y), & a \leq x \leq y \leq b; \\ \zeta(x)\xi(y), & a \leq y \leq x \leq b; \end{cases} \quad (5.68)$$

где ξ и ζ — ненулевые действительные решения однородного уравнения, удовлетворяющие условиям $\delta_1(\xi) = 0$ и $\delta_2(\zeta) = 0$; $W(x)$ — определитель Вронского решений ξ и ζ . Из (5.68) видно, что функция $G(x, y)$ действительна и симметрична: $G(x, y) = G(y, x)$.

Заменяя в (5.67) функцию f на $\mu \cdot \varphi$, сводим задачу Штурма–Лиувилля (5.65) к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \mu \cdot \int_a^b G(x, y) \varphi(y) dy, \quad a \leq x \leq b. \quad (5.69)$$

Обратно, пусть функция $\varphi \in C[a, b]$ и удовлетворяет уравнению (5.69). Рассмотрим краевую задачу

$$(L\psi)(x) = \mu \cdot \varphi(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \delta(\psi) = 0.$$

Её единственное решение ψ записывается в виде $\psi(x) = \mu \cdot \int_a^b G(x, y) \varphi(y) dy$, т.е. $\psi(x) \equiv \varphi(x)$; следовательно, функция $\varphi \in Dom L$ и является решением задачи (5.65). Итак, дифференциальная задача на собственные значения (5.65) эквивалентна задаче о характеристических значениях (5.69) при условии, что $\mu = 0$ не есть собственное значение задачи (5.65).

От предположения, что $\mu = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля можно освободиться. Для этого вместо задачи (5.65) рассмотрим задачу

$$(L_1\varphi)(x) \equiv (L\varphi)(x) + \varphi(x) = \nu \cdot \varphi(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \delta(\varphi) = 0 \quad (5.70)$$

с теми же краевыми условиями. Число $\nu = 0$ не будет собственным значением задачи (5.70) по утверждению 5.17, т.к. $q(x) + 1 \not\equiv 0$. Поэтому задача (5.70) эквивалентна интегральному уравнению

$\varphi(x) = \nu \cdot \int_a^b G_1(x, y) \varphi(y) dy$, где G_1 — функция Грина оператора L_1 . Поскольку $Dom L_1 = Dom L$, задача (5.70) эквивалентна задаче (5.65) при $\nu = \mu + 1$. Следовательно, задача (5.65) эквивалентна интегральному уравнению $\varphi(x) = (\mu + 1) \cdot \int_a^b G_1(x, y) \varphi(y) dy$ с действительным симметричным ядром G_1 . Это верно и в случае, когда число $\mu = 0$ является собственным значением задачи (5.65), и когда не является им.

Построение функции G_1 проводится по формуле (5.68) для оператора L_1 .

Для задачи Штурма–Лиувилля (5.65) справедливы все факты теории интегральных уравнений с непрерывным действительным симметричным ядром. Перечислим свойства этой задачи.

По теореме 5.1 интегральное уравнение, эквивалентное задаче (5.65), имеет характеристическое число. Следовательно, задача (5.65) имеет хотя бы одно собственное значение.

По теореме 2.1 множество всех собственных значений μ_n задачи (5.65) не более чем счётно и не имеет конечных предельных точек.

По теореме 2.3 все собственные значения μ_n задачи (5.65) имеют конечные геометрические кратности.

По утверждению 5.4 все μ_n действительны, а собственные функции задачи (5.65), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. По утверждению 5.5 все собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_n$ задачи (5.65) можно выбрать действительными. По следствию 5.8 все $\mu_n \geq 0$, т.к. оператор $L \geq 0$.

Докажем, что **множество всех собственных значений μ_n счётно**. Если бы это множество было конечным, то по утверждению

5.9 ядро $G_1(x, y)$ было бы вырожденным: $G_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}{\mu_i + 1}$.

Все собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_i \in C^2[a, b]$, т.к. $\overset{\circ}{\varphi}_i \in \text{Dom} L$. Поэтому функция $G_1 \in C^2(S)$. Но это противоречит требованию скачка производной $\frac{\partial G_1}{\partial x}$ при $x = y$ в определении функции Грина. ■

Поскольку все $\mu_n \geq 0$, интегральный оператор $(A_1\varphi)(x) = \int_a^b G_1(x, y)\varphi(y)dy$ является неотрицательным. Тогда

по теореме 5.4 выполнено равенство $G_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}{\mu_i + 1}$, причём билинейный ряд регулярно сходится в замкнутом квадрате S . Если же $\mu = 0$ не есть собственное значение задачи (5.65), то интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_a^b G(x, y)\varphi(y)dy$ неотрицателен. И тогда

$G(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\overset{\circ}{\varphi}_i(y)}{\mu_i}$ по теореме 5.4.

Докажем, наконец, что **геометрические кратности всех собственных значений μ_n равны 1**. Пусть собственному значению μ задачи (5.65) отвечают собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ и $\overset{\circ}{\psi}(x)$. Это значит, что $\overset{\circ}{\varphi}$ и $\overset{\circ}{\psi}$ удовлетворяют уравнению

$$p(x)\varphi''(x) + p'(x)\varphi'(x) + (\mu - q(x))\varphi(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

с непрерывными действительными коэффициентами. Для решений $\overset{\circ}{\varphi}$ и $\overset{\circ}{\psi}$ этого уравнения справедлива альтернатива:

— либо определитель Вронского $W[\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}](x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и функции $\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}$ линейно зависимы на $[a, b]$;

— либо при всех $x \in [a, b]$ определитель Вронского $W[\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}](x) \neq 0$ и функции $\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}$ линейно независимы на $[a, b]$.

Покажем, что $\overset{\circ}{\varphi}$ и $\overset{\circ}{\psi}$ линейно зависимы на $[a, b]$. Из краевого условия задачи (5.65) имеем

$$\begin{cases} H_1 \cdot \overset{\circ}{\varphi}(b) + H_2 \cdot \overset{\circ}{\varphi}'(b) = 0 \\ H_1 \cdot \overset{\circ}{\psi}(b) + H_2 \cdot \overset{\circ}{\psi}'(b) = 0, \end{cases}$$

причём вектор $\{H_1, H_2\} \neq 0$. Отсюда следует, что

$$W[\overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{\psi}](b) = \begin{vmatrix} \overset{\circ}{\varphi}(b) & \overset{\circ}{\psi}(b) \\ \overset{\circ}{\varphi}'(b) & \overset{\circ}{\psi}'(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\circ}{\varphi}(b) & \overset{\circ}{\varphi}'(b) \\ \overset{\circ}{\psi}(b) & \overset{\circ}{\psi}'(b) \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$$

5.6.3. Теорема Стеклова.

Пусть $\{\overset{\circ}{\varphi}_n\}$ — ортонормированная система всех собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (5.65), заданной дифференциальным оператором L . Если число $\mu = 0$ является собственным значением задачи (5.65), то постоянная на $[a, b]$ нормированная собственная функция включается в систему.

Теорема 5.5 (теорема Стеклова).

Пусть $\eta \in \text{Dom} L$ (т.е. функция $\eta \in C^2[a, b]$ и удовлетворяет краевым условиям $\delta(\eta) = 0$, заданным в (5.65)). Тогда функция η разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_n\}$ собственных функций задачи (5.65):

$$\eta(x) = \sum_n (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_n) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_n(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (5.71)$$

Ряд Фурье (5.71) регулярно сходится на $[a, b]$.

Доказательство.

Наряду с дифференциальным оператором L введём оператор L_1 (см. (5.70)); $\text{Dom} L_1 = \text{Dom} L$. Так как $\eta \in \text{Dom} L$, то $\eta \in \text{Dom} L_1$. Введём обозначение $\omega = L_1 \eta$. Тогда $\omega \in C[a, b]$. Таким образом, функция η является решением краевой задачи

$$(L_1 \eta)(x) = \omega(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \delta(\eta) = 0. \quad (5.72)$$

Число $\nu = 0$ не является собственным значением задачи (5.70), поэтому существует функция Грина $G_1(x, y)$ оператора L_1 . Единственное

решение η задачи (5.72) имеет вид $\eta(x) = \int_a^b G_1(x, y)\omega(y)dy$, т.е. функция η истокообразно представима через непрерывное действительное симметричное ядро $G_1(x, y)$. По теореме Гильберта–Шмидта функция η разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций ядра G_1 . Собственные функции ядра G_1 совпадают с собственными функциями задачи (5.70), а тем самым и с собственными функциями задачи (5.65). ■

Следствие 5.10.

Если функция η удовлетворяет условиям теоремы 5.5, то справедливо равенство

$$\|\eta\|_{L_2[a,b]}^2 = \sum_n |(\eta, \overset{\circ}{\varphi}_n)|^2. \quad (*)$$

Замечание 5.20.

Если $\eta \in L_2[a, b]$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \eta - \sum_{n=0}^m (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_n) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_n \right\|_{L_2[a,b]} = 0$$

и справедливо равенство Парсеваля (*). Это значит, что система $\{\overset{\circ}{\varphi}_n\}$ замкнута в $L_2[a, b]$. Доказательство опирается на тот факт, что множество $Dom L$ всюду плотно в $L_2[a, b]$. ■

5.6.4. Задача Штурма–Лиувилля в более общей постановке.

К задаче Штурма–Лиувилля приводит метод разделения переменных при решении краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Пример 5.5.

Разделим независимые переменные x и t в уравнении свободных продольных колебаний упругого стержня

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \cdot u_{xx}(x, t), \quad a < x < b, \quad t > 0. \quad (5.73)$$

То есть будем искать частные решения этого уравнения, имеющие вид $u(x, y) = \varphi(x) \cdot T(t) \neq 0$. Тогда для нахождения функции $\varphi(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \mu\varphi(x) = 0 \quad (5.74)$$

с параметром μ . Краевые условия для $\varphi(x)$ при $x = a$ и $x = b$ следуют из краевых условий, которые должны быть поставлены для уравнения

(5.73). В уравнении колебаний (5.73) стержень предполагается однородным: его объемная плотность массы и коэффициент упругости не зависят от x .

Пусть стержень имеет переменные плотность массы $\rho(x)$ и коэффициент упругости $p(x)$. Предположим, что функция $\rho \in C[a, b]$, $\rho(x) > 0$, а функция $p \in C^1[a, b]$, $p(x) > 0$. Тогда малые продольные смещения точек стержня $u(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\rho(x) \cdot u_{tt}(x, t) = (p(x) \cdot u_x(x, t))_x, \quad a < x < b, \quad t > 0.$$

Разделяя в нём переменные x и t , получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(p(x)\varphi'(x))' + \mu \cdot \rho(x)\varphi(x) = 0$$

с параметром μ (проверьте!). ■

Пример 5.6.

К (5.74) приводит и разделение переменных в уравнении теплопроводности

$$u_t(x, t) = a^2 \cdot u_{xx}(x, t), \quad a < x < b, \quad t > 0. \quad (5.75)$$

Здесь $u(x, t)$ — температура в точке x стержня в момент времени t . Стержень предполагается однородным: коэффициент теплопроводности, объёмная плотность массы и удельная теплоёмкость не зависят от x . Кроме того, в уравнении (5.75) не учитывается обмен теплотой через боковую поверхность стержня.

Пусть стержень имеет переменные плотность массы $\rho(x)$, коэффициент теплопроводности $p(x)$ и удельную теплоёмкость $c(x)$. Учтём обмен теплотой между стержнем и окружающей средой через его боковую поверхность; при этом температура стержня удовлетворяет уравнению

$$c(x)\rho(x)u_t(x, t) = (p(x)u_x(x, t))_x - q(x)u(x, t), \quad a < x < b, \quad t > 0,$$

где $\rho \in C[a, b]$, $\rho(x) > 0$, $p \in C^1[a, b]$, $p(x) > 0$, $q \in C[a, b]$, $q(x) \geq 0$; для простоты обозначений здесь и далее будем считать $c(x) \equiv 1$. Разделяя переменные x и t , получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(p(x)\varphi'(x))' - q(x)\varphi(x) + \mu \cdot \rho(x) \cdot \varphi(x) = 0$$

с параметром μ (проверьте!). ■

Как показывают примеры 5.5 и 5.6, задачу (5.65) целесообразно заменить на более общую:

$$(L\varphi)(x) = \mu \cdot \rho(x) \cdot \varphi(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \delta(\varphi) = 0; \quad (5.76)$$

здесь оператор L и краевые условия те же, что в (5.65), а функция $\rho \in C[a, b]$, $\rho(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$.

Замечание 5.21.

Если функция $p(x) \cdot \rho(x)$ имеет непрерывную вторую производную на отрезке $[a, b]$, то существует преобразование переменных $\{x, \varphi, \mu\} \rightarrow \{w, \psi, \nu\}$, которое приводит уравнение (5.76) к виду $-\frac{d^2\psi(w)}{dw^2} + Q(w)\psi(w) = \nu \cdot \psi(w)$. Однако во многих прикладных задачах важно сохранить первоначальную постановку (5.76). ■

Пусть число $\mu = 0$ не является собственным значением оператора L (т.е. задачи (5.65)); по утверждению 5.17 это означает, что задача

$$-(p(x)\varphi'(x))' = \mu \cdot \rho(x)\varphi(x), \quad a \leq x \leq b; \quad \varphi'(a) = 0, \quad \varphi'(b) = 0$$

исключается из рассмотрения. Функция Грина $G(x, y)$ оператора L не зависит от функции ρ . Поэтому задача (5.76) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \mu \cdot \int_a^b G(x, y)\rho(y)\varphi(y)dy. \quad (5.77)$$

Ядро $G(x, y) \cdot \rho(y)$ интегрального оператора не является симметричным. Умножим уравнение (5.77) на $\sqrt{\rho(x)}$ и положим $\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} \cdot \varphi(x)$, $\mathcal{K}(x, y) = \sqrt{\rho(x)} \cdot G(x, y) \cdot \sqrt{\rho(y)}$. Тогда получим уравнение

$$\psi(x) = \mu \cdot \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\psi(y)dy \quad (5.78)$$

с непрерывным симметричным действительным ядром $\mathcal{K}$. Характеристические числа уравнения (5.78) совпадают с собственными значениями задачи (5.76).

Ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\psi}_n\}$ действительных собственных функций ядра $\mathcal{K}$ соответствует система $\{\overset{\circ}{\varphi}_n\}$ собственных функций задачи (5.76), ортонормированная в смысле скалярного произведения с весом ρ : равенство $\int_a^b \overset{\circ}{\psi}_n(x)\overset{\circ}{\psi}_m(x)dx = 0$ при $n \neq m$

означает $\int_a^b \overset{\circ}{\varphi}_n(x)\overset{\circ}{\varphi}_m(x)\rho(x)dx = 0$, а равенство $\int_a^b \left(\overset{\circ}{\psi}_n(x)\right)^2 dx = 1$

означает $\int_a^b \left(\overset{\circ}{\varphi}_n(x)\right)^2 \rho(x)dx = 1$.

Замечание 5.22.

Пусть функция $\eta(x)$ такова, что произведение $\sqrt{\rho(x)} \cdot \eta(x)$ источно-образно представимо через ядро $\mathcal{K}$: $\sqrt{\rho(x)} \cdot \eta(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\omega(y)dy$, т.е.

$\eta(x) = \int_a^b G(x, y) \sqrt{\rho(y)} \omega(y) dy$. Тогда по теореме Гильберта–Шмидта

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho(x)} \cdot \eta(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_a^b \sqrt{\rho(x)} \eta(x) \overset{\circ}{\psi}_i(x) dx \right) \cdot \overset{\circ}{\psi}_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_a^b \eta(x) \overset{\circ}{\varphi}_i(x) \rho(x) dx \right) \cdot \sqrt{\rho(x)} \overset{\circ}{\varphi}_i(x), \text{ т.е. } \eta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\eta, \overset{\circ}{\varphi}_i)_{\rho} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x), \end{aligned}$$

где коэффициенты Фурье функции η понимаются в смысле скалярных произведений с весом ρ . ■

Задачи к главе 3.

1. Имеет ли уравнение $\overset{\circ}{\varphi}(x) = \mu \int_0^x \frac{1}{y} \cdot \overset{\circ}{\varphi}(y) dy$ непрерывные на $0 \leq x < +\infty$ решения, отличные от $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0$?

2. Найдите непрерывное решение уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy = x^2, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

следующими способами: 1.) методом последовательных приближений с начальным приближением $\varphi_0(x) \equiv 0$; 2.) дважды дифференцируя уравнение в предположении $\varphi \in C^2(0 \leq x < +\infty)$; 3.) решая уравнение с вырожденным ядром.

3. Найдите непрерывное решение уравнения $\int_0^x (xy+1)\varphi(y)dy = x^2$, $0 \leq x < +\infty$.

4. Найдите непрерывное решение уравнения $\int_0^x (x+y+1)\varphi(y)dy = x^2$, $0 \leq x < +\infty$.

5. Сведите к интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода задачу Коши $\theta''(x) + (x^2 + 1)\theta(x) = \cos x$, $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 2$.

6. Сведите к интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода задачу Коши $\theta^{(3)}(x) - 3 \cdot \theta^{(2)}(x) - 6 \cdot \theta'(x) + 8 \cdot \theta(x) = e^x$, $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 1$, $\theta^{(2)}(0) = 1$.

7. Найдите непрерывное решение системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) - \int_0^x \varphi_2(y)dy = \sin x, \\ \varphi_2(x) + \int_0^x \varphi_1(y)dy = 1 - \cos x, \end{cases} \quad 0 \leq x < +\infty,$$

следующими способами: 1.) дифференцируя оба уравнения; 2.) применяя к обоим уравнениям преобразование Лапласа.

Задачи к главе 4.

1. Докажите, что если ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ и $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$, то для оператора $(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$, действующего из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, его норма $\|A\| \neq 0$.

2. Является ли ограниченным линейный оператор $(A\varphi)(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, действующий из $L_2[0, \pi]$ в $L_2[0, \pi]$?

3. Является ли оператор $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ вполне непрерывным?

- 1.) $(A\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(y)dy$; 2.) $(A\varphi)(x) = \int_0^1 (xy + x^2y^2)\varphi(y)dy$;
3.) $(A\varphi)(x) = x \cdot \varphi(x)$.

4. Для каких операторов предыдущей задачи $\dim \text{Ran} A < \infty$?

5. $H = L_2[0, 1]$, $A: H \rightarrow H$. Найдите сопряжённый оператор A^* .

- 1.) $(A\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(y)dy$; 2.) $(A\varphi)(x) = x \cdot \varphi(x)$.

6. A и B — самосопряжённые линейные непрерывные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. В каком случае оператор AB будет самосопряжённым?

7. Что можно утверждать о резольвенте Фредгольма $\Gamma(x, y; \mu)$ оператора A из примера 4.9?

8. Оператор $(A\varphi)(x) = x \cdot \varphi(x)$ рассматриваем как действующий в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$. Является ли оператор A непрерывным? Является ли он самосопряжённым? Имеет ли оператор A собственные значения? Является ли оператор A вполне непрерывным?

9. Оператор $(A\varphi)(x) = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos y \cdot \varphi(y)dy$ рассматриваем как

действующий в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Является ли этот оператор вполне непрерывным? Является ли он самосопряжённым? Имеет ли оператор A характеристические значения? Является ли число $\lambda = 0$ его собственным значением? При каких значениях λ существует непрерывный обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$?

10. Оператор $(A\varphi)(x) = \int_0^1 xy \cdot \varphi(y)dy$ рассматриваем как действующий в пространстве $L_2[0, 1]$. Докажите, что оператор A ограничен и найдите $\|A\|$. Докажите, что $A = A^*$. Найдите максимальный вектор оператора A . Докажите, что число $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A бесконечной геометрической кратности. При каких значениях λ существует непрерывный обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$?

Задачи к главе 5.

1. $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$. Образует ли линейное многообразие в пространстве $L_2(S)$ над полем чисел $\mathbb{R}$ множество всех непрерывных на S функций $\mathcal{K}(x, y)$, удовлетворяющих условию $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$? Образует ли линейное многообразие в пространстве $L_2(S)$ над полем чисел $\mathbb{C}$ множество всех непрерывных на S функций $\mathcal{K}(x, y)$, удовлетворяющих условию $\mathcal{K}(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$?

2. В квадрате $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = e^{i(x-y)}$ интегрального оператора $(A\varphi)(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$; $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$. Является ли оператор A ограниченным? Является ли оператор A вполне непрерывным? Является ли оператор A самосопряжённым? Найдите все характеристические значения оператора A и отвечающие им собственные функции.

3. В квадрате $S = \{-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(ix) \cdot \cos(iy)}{i^3}$ интегрального оператора $(A\varphi)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$; $A : L_2[-\pi, \pi] \rightarrow L_2[-\pi, \pi]$. Является ли оператор A ограниченным? Является ли оператор A вполне непрерывным? Является ли оператор A самосопряжённым? Найдите все характеристические значения оператора A и отвечающие им собственные функции; образуют ли они ортонормированную систему? Является ли число $\lambda = 0$ собственным значением оператора A ?

4. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность (5.5) характеристических чисел самосопряжённого ядра, μ — его правильное значение. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - \mu|^2}$ сходится.

5. При фиксированном значении $y \in [a, b]$ и при $|\mu| < |\mu_1|$ вычислите коэффициенты Фурье (5.43) резольвенты $\Gamma(x, y; \mu)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_i(x)\}$ собственных функций ядра $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$, исходя из разложения резольвенты в степенной ряд (2.31) и из билинейных рядов (5.18) для итерированных ядер $\mathcal{K}_n$.

6. Исходя из билинейного ряда (5.44) для резольвенты $\Gamma(x, y; \mu)$ ядра $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*$, докажите, что при каждом $x \in [a, b]$ сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\mathring{\varphi}_i(x)}{\mu_i - \mu} \right|^2.$$

7. Пусть невырожденное самосопряжённое ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ и непрерывно в квадрате S . Докажите, что

$$|\mu_1| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{tr} \mathcal{K}_{2m}}{\text{tr} \mathcal{K}_{2m+2}} \right)^{1/2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\text{tr} \mathcal{K}_{2m}} \right)^{1/2m}.$$

8. Пусть интегральный оператор A имеет самосопряжённое непрерывное в квадрате S ядро $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$. Пусть его характеристические числа μ_i и ортонормированные собственные функции $\mathring{\varphi}_i$ определены в (5.5). Докажите, что для всех $\varphi \in L_2[a, b]$ и $\psi \in L_2[a, b]$ выполнено равенство

$$(A\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \mathring{\varphi}_i) \cdot \overline{(\psi, \mathring{\varphi}_i)}}{\mu_i}.$$

Запишите это равенство при $\psi = \varphi$.

9. Пусть $(L\varphi)(x) = i \cdot \varphi'(x)$, $\delta(\varphi) = \varphi(1) - \alpha \cdot \varphi(0)$, где $\alpha = \text{const} \in \mathbb{C}$. При каких α краевая задача на собственные значения

$$(L\varphi)(x) = \mu \cdot \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \delta(\varphi) = 0$$

будет самосопряжённой?

10. Пусть $(L\varphi)(x) = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) + q(x)\varphi(x)$, где $p \in C^1[a, b]$, $q \in C[a, b]$, причём $p(x)$ не обращается в нуль на $[a, b]$. Пусть краевые условия $\delta(\varphi) = 0$ имеют вид

$$u_{11} \cdot \varphi(a) + u_{12} \cdot \varphi'(a) = 0, \quad v_{21}\varphi(b) + v_{22}\varphi'(b) = 0.$$

Докажите, что задача $(L\varphi)(x) = \mu \cdot \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, $\delta(\varphi) = 0$ является самосопряжённой в том и только в том случае, если функции p и q действительны, и постоянные u_{11} , u_{12} , v_{21} , v_{22} действительны.

11. Интегральное уравнение $\varphi(x) = \mu \cdot \int_0^1 \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$, $0 \leq x \leq 1$,
с ядром $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ y, & 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$ сведите к задаче Штурма–
Лиувилля. Найдите его характеристические значения и собственные
функции.

Ответы задач к главе 3.

1. Каждому $\mu > 0$ отвечает решение $\overset{\circ}{\varphi}(x) = x^\mu$ наряду с решением $\overset{\circ}{\varphi}(x) \equiv 0$.

2. $\varphi(x) = 2(\operatorname{ch} x - 1)$.

3. Если функция φ непрерывна, то уравнение можно продифференцировать:

$$(x^2 + 1)\varphi(x) + \int_0^x y\varphi(y)dy = 2x. \quad (**)$$

Получили уравнение Вольтерры 2-го рода

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{y}{x^2 + 1} \cdot \varphi(y)dy = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

которое по теореме 3.1 имеет единственное непрерывное решение. Это решение φ можно найти, например, дифференцируя $(**)$ в предположении $\varphi \in C^1$: $(x^2 + 1)\varphi'(x) + 3\varphi(x) = 2$; кроме того, из $(**)$ следует $\varphi(0) = 0$. Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, получаем $\varphi(x) = \frac{2}{3} \left(1 - e^{-3\operatorname{arctg} x} \right)$.

4. $\varphi(x) = \frac{2}{3} \left(1 - (2x + 1)^{-\frac{3}{2}} \right)$.

5. $\varphi(x) + \int_0^x (x^2 + 1)(x - y)\varphi(y)dy = \cos x - 2x \cdot (x^2 + 1)$, где $\varphi(x) = \theta''(x)$.

6. $\varphi(x) + \int_0^x [4(x - y)^2 - 6(x - y) - 3]\varphi(y)dy = e^x - 4x^2 - 2x + 1$, где

$\varphi(x) = \theta^{(3)}(x)$.

7. $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) \equiv 0$.

Ответы задач к главе 4.

2. Оператор A не является ограниченным. $Dom A \neq L_2[0, \pi]$.

Для последовательности функций $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin(nx)$ будем иметь

$$(A\varphi_n)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot n \cdot \cos(nx). \text{ Отсюда } \|A\varphi_n\|_{L_2[0, \pi]} = n, \|\varphi_n\|_{L_2[0, \pi]} = 1.$$

Следовательно, $\sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\| = +\infty$, т.е. оператор A неограниченный.

3. 1.) Да; 2.) Да; 3.) Нет.

$$5. 1.) (A^*\psi)(x) = \int_x^1 \psi(y) dy; \quad 2.) (A^*\psi)(x) = x \cdot \psi(x).$$

7. $\Gamma(x, y; \mu)$ является целой аналитической функцией параметра μ .

8. Оператор A непрерывен. $A = A^*$. Оператор A не имеет собственных значений. Оператор A не является вполне непрерывным.

9. Оператор A вполне непрерывен. $A \neq A^*$. Оператор A не имеет характеристических значений. Число $\lambda = 0$ является собственным значением бесконечной геометрической кратности. При $\lambda \neq 0$ существует непрерывный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$.

10. Максимальным вектором оператора A является функция $\sqrt{3}x$ (см. также примеры 2.8, 2.10 и замечание 2.32). $\|A\| = \frac{1}{3}$. Непрерывный обратный оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \frac{1}{3}$.

Ответы задач к главе 5.

1. Да. Нет.

2. Оператор самосопряжённый вполне непрерывный, имеет единственное характеристическое значение $\mu_1 = 1$; $\overset{\circ}{\varphi}_1(x) = e^{ix}$.

3. Оператор самосопряжённый вполне непрерывный, имеет характеристические значения $\mu_n = n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$ образуют ортономированную систему. Число $\lambda = 0$ является собственным значением бесконечной геометрической кратности.

4. $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, поэтому для всех достаточно больших номеров n будет выполнено неравенство $|\mu_n| > 2|\mu|$. Из неравенства $|\mu_n| = |\mu_n - \mu + \mu| \leq |\mu_n - \mu| + |\mu| < |\mu_n - \mu| + \frac{1}{2}|\mu_n|$ получаем $|\mu_n - \mu| > \frac{1}{2}|\mu_n|$. Тогда $\frac{1}{|\mu_n - \mu|} < \frac{2}{|\mu_n|}$ и $\frac{1}{|\mu_n - \mu|^2} < \frac{4}{\mu_n^2}$. По замечанию 5.9 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}$ сходится. Поэтому сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - \mu|^2}$.

6. Сходимость указанного ряда вытекает из неравенства Бесселя для коэффициентов Фурье функции $\Gamma(x, y; \mu)$ по ортонормированной системе функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(y)\}$.

7. Указание. Используйте формулу (5.32).

9. $|\alpha| = 1$.

11. $-\varphi''(x) = \mu \cdot \varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$.
 $\mu_n = \left(\frac{\pi}{2} \cdot (2n + 1)\right)^2$, $\overset{\circ}{\varphi}_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n + 1)x\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Оглавление

Глава 6	Некоторые сведения о линейных интегральных уравнениях 1–го рода.	5
6.1	Линейное интегральное уравнение 1–го рода с фредгольмовым самосопряжённым ядром. Теорема Пикара.	5
6.2	Уравнение Абеля.	10
6.2.1	Задача Абеля.	10
6.2.2	Решение уравнения Абеля.	12
6.2.3	Уравнения типа Абеля.	14
6.2.4	Дифференцирование дробного порядка.	18
6.3	Линейные интегральные уравнения Фредгольма 1–го рода с приближённо заданной правой частью.	21
Глава 7	Линейные интегральные уравнения 2–го рода со слабой особенностью ядра.	25
7.1	Операторы со слабой особенностью в случае многих независимых переменных.	25
7.2	Оценка ядра произведения двух операторов со слабой особенностью. Ограниченность итерированных ядер, начиная с некоторого номера.	32
7.3	Справедливость теорем Фредгольма для уравнений со слабой особенностью.	38
7.4	Ядро, непрерывное в целом. Непрерывность решений интегрального уравнения со слабой особенностью.	44
Глава 8	Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, их сведение к интегральным уравнениям Фредгольма 2–го рода со слабыми особенностями.	50
8.1	Уравнение Лапласа. Постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана в пространстве и на плоскости.	50
8.1.1	Математические модели некоторых стационарных физических процессов. Краевые условия на поверхностях и кривых Ляпунова.	51
8.1.2	Внутренние задачи Дирихле и Неймана.	53
8.1.3	Единственность классических решений внутренних краевых задач для уравнения Лапласа.	54

8.1.4	Фундаментальные решения уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости. Регулярные на бесконечности гармонические функции в пространстве и на плоскости.	55
8.1.5	Внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность их классических решений.	56
8.1.6	Ньютоновы и логарифмические потенциалы двойного и простого слоёв.	58
8.2	Поверхностный потенциал двойного слоя, его свойства. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле в $\mathbb{R}^3$ к интегральным уравнениям.	59
8.3	Поверхностный потенциал простого слоя, его свойства. Сведение внутренней и внешней задач Неймана в $\mathbb{R}^3$ к интегральным уравнениям.	64
8.4	Применение теории Фредгольма для изучения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана в пространстве.	68
8.5	Логарифмический потенциал двойного слоя. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле в $\mathbb{R}^2$ к интегральным уравнениям.	75
8.6	Логарифмический потенциал простого слоя. Сведение внутренней и внешней задач Неймана в $\mathbb{R}^2$ к интегральным уравнениям.	79
8.7	Применение теории Фредгольма для изучения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана на плоскости.	83
	Задачи.	89
	Ответы.	93

Глава 6.

Некоторые сведения о линейных интегральных уравнениях 1-го рода.

6.1. Линейное интегральное уравнение 1-го рода с фредгольмовым самосопряжённым ядром. Теорема Пикара.

Изучим свойства уравнения 1-го рода

$$(A\varphi)(x) \equiv \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.1)$$

с самосопряжённым ядром $\mathcal{K}(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)} \neq 0$. Предполагаем, что в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ ядро непрерывно или фредгольмово. Предполагаем, что свободный член $f \in L_2[a, b]$, и решение φ ищем в $L_2[a, b]$.

Замечание 6.1.

По утверждению 2.8 если $\mathcal{K} \in C(S)$, а $\varphi \in L_2[a, b]$, то функция $(A\varphi)(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Поэтому в случае непрерывного ядра для разрешимости уравнения (6.1) надо требовать $f \in C[a, b]$.■

Замечание 6.2.

Как и в случае непрерывного ядра, для ядра $\mathcal{K} = \mathcal{K}^* \in L_2(S)$ его характеристические числа μ_i и ортонормированные собственные функции $\overset{\circ}{\varphi}_i(x)$ можно записать в виде последовательностей (5.5). Для самосопряжённого фредгольмова ядра справедлива теорема Гильберта-Шмидта (см. замечание 5.6).■

Свойства уравнения (6.1) зависят прежде всего от того, является ли полной в $L_2[a, b]$ ортонормированная система $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ собственных функций оператора A . Напомним два важнейших определения.

Определение 6.1.

Ортонормированную систему $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ называют **полной**, если кроме нулевого элемента нет никакого другого элемента данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам системы $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$.■

Определение 6.2.

Ортонормированную систему $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ называют **замкнутой**, если любой элемент данного евклидова пространства можно с любой точностью приблизить по норме этого пространства линейными комбинациями конечного числа элементов системы $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$.■

Всякая замкнутая ортонормированная система является полной; а в гильбертовом пространстве из полноты ортонормированной системы следует её замкнутость (см. [23], гл. 11, §3). Пространство $L_2[a, b]$ является гильбертовым, поэтому свойства полноты и замкнутости системы $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ совпадают.

Для оператора A в (6.1) система его собственных функций может оказаться полной в $L_2[a, b]$, а может оказаться не полной (приведите примеры обоих случаев!).

Напомним, что две измеримые функции называют эквивалентными на $[a, b]$, если они различаются только на множестве нулевой меры Лебега. Иначе говоря, эквивалентные функции совпадают почти всюду. Эквивалентные функции часто можно не различать.

Утверждение 6.1.

Если система собственных функций (5.5) оператора A не полная в $L_2[a, b]$, то однородное уравнение

$$\int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (6.2)$$

имеет ненулевое решение $\varphi \neq 0$, $\varphi \in L_2[a, b]$ (точнее — решение в $L_2[a, b]$, не эквивалентное нулевому), т.е. $\text{Ker} A \neq 0$.

Если система собственных функций (5.5) полна в $L_2[a, b]$, то однородное уравнение (6.2) имеет единственное решение $\varphi = 0$ в $L_2[a, b]$ (строго говоря — единственное с точностью до эквивалентности), т.е. $\text{Ker} A = 0$.

Доказательство.

Как и в случае непрерывного ядра, для ядра $\mathcal{K} \in L_2(S)$ справедливо утверждение 5.10: если A — самосопряжённый интегральный оператор с фредгольмовым ядром, то функция $\varphi \in \text{Ker} A$ в том и только в том случае, если она ортогональна всем собственным функциям $\overset{\circ}{\varphi}_i$ оператора A , соответствующим его характеристическим значениям μ_i (т.е. его ненулевым собственным значениям $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$). Этот факт выражается ортогональным разложением $L_2[a, b] = \text{Ker} A \oplus \overline{\text{Ran} A}$ (см. конец раздела 5.2; см. замечание 5.6).

Если система собственных функций (5.5) не является полной, то найдётся такая функция $\varphi \in L_2[a, b]$, $\varphi \neq 0$, что $\varphi \perp \overset{\circ}{\varphi}_i$ для всех номеров i . Тогда $\varphi \in \text{Ker} A$, т.е. удовлетворяет однородному уравнению (6.2).

Если система собственных функций (5.5) полная, то лишь нулевой элемент пространства $L_2[a, b]$ будет ортогонален всем $\overset{\circ}{\varphi}_i$; т.е. $\text{Ker} A = 0$. ■

Пример 6.1.

Пусть ядро $\mathcal{K}$ в (6.2) вырожденное. Тогда $\text{Ker} A \neq 0$, причём имеется счётная система линейно независимых собственных функций, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$. ■

Утверждение 6.2.

Если система собственных функций (5.5) полна в $L_2[a, b]$, то неоднородное уравнение (6.1) не может иметь в $L_2[a, b]$ более одного решения (решения рассматриваем с точностью до эквивалентности).

Доказательство.

Предположим, что уравнение (6.1) имеет в $L_2[a, b]$ два не эквивалентных решения φ и ξ . Тогда разность $\omega = \varphi - \xi \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению (6.2), т.е. $\omega \in \text{Ker} A$. Следовательно, функция ω является собственной функцией оператора A , отвечающей собственному значению $\lambda = 0$. По утверждению 4.7 функция ω ортогональна всем собственным функциям $\overset{\circ}{\varphi}_i$, которые соответствуют $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \neq 0$; т.е. система $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ не полная — противоречие! ■

В доказательстве необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (6.1) понадобится теорема Рисса–Фишера*, которая доказывается в курсе функционального анализа (см. [23], гл. 11, §2).

Теорема 6.1 (Рисса–Фишера).

Пусть $\{\varphi_i\}$ — произвольная ортонормированная система в $L_2[a, b]$ (её полнота в $L_2[a, b]$ не предполагается). Тогда для любой последовательности комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$, найдётся и притом единственная (с точностью до эквивалентности) функция $\varphi \in L_2[a, b]$ такая, что $c_i = (\varphi, \varphi_i)$, $i \in \mathbb{N}$, и $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|\varphi\|_{L_2[a, b]}^2$. ■

Теорема 6.2.

1°. Чтобы неоднородное уравнение (6.1) было разрешимо в $L_2[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Фурье свободного члена $f(x)$ по ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ собственных функций оператора A сходил к $f(x)$ в среднем квадратическом на $[a, b]$, и чтобы сходилась числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \cdot \left| (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \right|^2. \quad (6.3)$$

2°. Если уравнение (6.1) разрешимо в $L_2[a, b]$, то оно имеет частное решение $\varphi(x)$, к которому в среднем квадратическом на $[a, b]$ сходится

* Фишер Эрнст Сигизмунд (1875–1954) — немецкий математик.

ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i(x). \quad (6.4)$$

Все решения уравнения (6.1) имеют вид $\varphi(x) + \psi(x)$, где функция $\psi \in L_2[a, b]$ является некоторым решением однородного уравнения (6.2).

3°. Если система $\{\overset{\circ}{\varphi}_i(x)\}$ полна в $L_2[a, b]$, то $\psi = 0$ (с точностью до эквивалентности). Тогда при условии сходимости числового ряда (6.3) уравнение (6.1) имеет в $L_2[a, b]$ единственное решение $\varphi(x)$, к нему в среднем квадратическом сходится ряд (6.4).

Доказательство.

Необходимость (утверждения 1°, 2°, 3°). Пусть существует решение $\varphi \in L_2[a, b]$ неоднородного уравнения (6.1). Выразим коэффициенты Фурье функции φ по ортонормированной системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ через коэффициенты Фурье свободного члена $f \in L_2[a, b]$:

$$(f, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (A\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (\varphi, A\overset{\circ}{\varphi}_i) = (\varphi, \frac{1}{\mu_i} \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i) = \frac{1}{\mu_i} \cdot (\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i),$$

т.к. $A = A^*$ и $\mu_i \in \mathbb{R}$; отсюда $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = \mu_i \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i)$. По неравенству Бесселя для функции $\varphi \in L_2[a, b]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| (\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \cdot \left| (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \right|^2 \leq \|\varphi\|_{L_2[a, b]}^2 < \infty,$$

т.е. числовой ряд (6.3) сходится.

Если существует решение $\varphi \in L_2[a, b]$ уравнения (6.1), то функция $f \in L_2[a, b]$ истокообразно представима через ядро $\mathcal{K}$, т.е. $f \in \text{Ran} A$. В случае непрерывного ядра $\mathcal{K}$ по теореме Гильберта–Шмидта ряд Фурье функции f по системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ сходится равномерно (а сама функция f в этом случае должна быть непрерывной). В случае, когда ядро $\mathcal{K} \in L_2(S)$ не обязательно непрерывно, ряд Фурье функции f заведомо сходится к f в среднем квадратическом. (См. замечание 5.6. Теорема Гильберта–Шмидта утверждает, что система собственных функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ замкнута во множестве $\text{Ran} A$ в смысле нормы пространства $L_2[a, b]$. При этом замкнутость системы $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ во всем пространстве $L_2[a, b]$ не предполагается!)

Докажем, что функциональный ряд (6.4) сходится в среднем квадратическом именно к решению уравнения (6.1), если это уравнение разрешимо в $L_2[a, b]$. Как доказано выше, числовой ряд (6.3) сходится. Тогда по теореме Рисса–Фишера в $L_2[a, b]$ существует единственная функция φ (с точностью до эквивалентности), коэффициенты Фурье

$(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i)$ которой равны $\mu_i \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i)$, и выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \left| (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \right|^2 = \|\varphi\|_{L_2[a,b]}^2. \quad (6.5)$$

Из тождества Бесселя (см. [23], гл. 10, §1)

$$\left\| \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i - \varphi \right\|_{L_2[a,b]}^2 = \|\varphi\|_{L_2[a,b]}^2 - \sum_{i=1}^m \mu_i^2 \cdot \left| (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \right|^2$$

и из (6.5) следует, что функциональный ряд (6.4) сходится в среднем квадратическом к функции φ . Обозначим через $S_m(x)$ частичные суммы ряда (6.4). Применим оператор A к S_m :

$$AS_m = A \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \cdot (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i \right) = \sum_{i=1}^m (f, \overset{\circ}{\varphi}_i) \cdot \overset{\circ}{\varphi}_i - \text{получили частичную сумму ряда Фурье функции } f, \text{ который сходится к } f \text{ в среднем квадратическом.}$$

Оператор A действует из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$ и непрерывен (см. пример 4.4). Поэтому последовательность функций AS_m сходится в среднем квадратическом к функции $A\varphi$. В силу единственности предельной функции (с точностью до эквивалентности) получаем $A\varphi = f$.

Наконец, очевидно, что любые два решения неоднородного уравнения (6.1) отличаются друг от друга на решение ψ однородного уравнения (6.2). При этом $\psi \perp \overset{\circ}{\varphi}_i$ для всех номеров i , т.к. $\psi \in \text{Ker } A$. Поэтому $(\varphi, \overset{\circ}{\varphi}_i) = (\varphi + \psi, \overset{\circ}{\varphi}_i)$. Если система $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ полна в $L_2[a, b]$, то по утверждению 6.1 возможно лишь $\psi = 0$ (с точностью до эквивалентности).

Достаточность (утверждение 1°). Если известно, что числовой ряд (6.3) сходится, а ряд Фурье функции f по системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ сходится к f в среднем квадратическом, то как в доказательстве необходимости получаем существование такой функции $\varphi \in L_2[a, b]$, что $A\varphi = f$. ■

Замечание 6.3.

Для разрешимости уравнения (6.1) в теореме 6.2 не требуется полнота системы собственных функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ в пространстве $L_2[a, b]$. ■

Замечание 6.4.

В случае, когда система собственных функций $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ полна в $L_2[a, b]$, теорему 6.2 называют теоремой Пикара. В этом случае ряд Фурье функции $f \in L_2[a, b]$ по системе $\{\overset{\circ}{\varphi}_i\}$ автоматически сходится к f в среднем квадратическом в силу замкнутости этой системы. Тогда для разрешимости уравнения (6.1) необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд (6.3). При выполнении этого условия единственное решение уравнения (6.1) даётся функциональным рядом (6.4), который сходится в среднем квадратическом. Единственность решения понимается с точностью до эквивалентности функций. ■

Замечание 6.5.

Оператор A в уравнении (6.1) вполне непрерывный. Поэтому не существует непрерывного обратного оператора A^{-1} (см. следствие 4.1). ■

6.2. Уравнение Абеля.

6.2.1. Задача Абеля.

Пусть дана гладкая кривая l в вертикальной плоскости Ozy ; ось Oy направлена вертикально вверх, ось Oz горизонтальна. Материальная точка массы m находится в положении $A = A(z_1, h)$ на кривой в состоянии покоя — её скорость в A равна нулю. Под действием силы тяжести материальная точка начинает двигаться вдоль кривой l и движется без трения до наинизшего положения $C(z_0, 0)$; точка C кривой l лежит на Oz . Предполагаем, что составляющая силы тяжести, касательная к l , всюду отлична от нуля, кроме, быть может, наинизшей точки C . Это значит, что кривая l задана уравнением $z = q(y)$, причём производная $q'_y(y)$ всюду конечна, кроме, быть может, точки C . (Если кривую l задать уравнением $y = p(z)$, то $p'_z(z) \neq 0$ всюду, кроме, быть может, точки C . Бесконечная производная p'_z допускается.) Тогда дифференциал длины дуги кривой l имеет вид $dl = \sqrt{(dz)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(q'(y))^2 + 1}dy$. Введём обозначение

$$\varphi(y) = +\sqrt{(q'(y))^2 + 1}. \quad (6.6)$$

В момент времени t в положении $B = B(z, y)$ между A и C материальная точка имеет скорость $\vec{v} = \left\{ \frac{dz}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\}$, касательную к кривой l . Величина скорости $v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. При переходе материальной точки из положения A в положение B приращение её кинетической энергии равно изменению её потенциальной энергии: $\frac{mv^2}{2} = mg(h - y)$, где g — ускорение силы тяжести. Отсюда $v^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2g(h - y)$, т.е. $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot ((q'(y))^2 + 1) = 2g(h - y)$. Выразим dt через dy :

$$dt = -\frac{\sqrt{(q'(y))^2 + 1}}{\sqrt{2g(h - y)}}dy = -\frac{\varphi(y)}{2g(h - y)}dy.$$

Знак минус в последнем равенстве выбран потому, что при увеличении времени t высота y материальной точки убывает. Время T падения точки из положения A в положение C соответствует изменению переменной y от h до 0 . Время T определяется кривой l и зависит от

исходной высоты материальной точки : $T = f(h)$. Поэтому функции φ и f связаны равенством

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}} dy = f(h). \quad (6.7)$$

Зная кривую l и исходную высоту h , находим по формуле (6.7) время T .

Абель поставил обратную задачу: найти кривую l , для которой время падения T с высоты h без начальной скорости до заданной точки $C(z_0, 0)$ (без трения) представляет собой заданную функцию $T = f(h)$. Эта задача сводится к нахождению неизвестной функции $\varphi(y)$ из уравнения (6.7) и к решению дифференциального уравнения (6.6) относительно $q(y)$ с условием $q(0) = z_0$.

Уравнение (6.7) называют уравнением Абеля. Это линейное интегральное уравнение первого рода типа Вольтерры. Его ядро имеет слабую особенность.

Пример 6.2 (задача о таутохроне).

Пусть в уравнении (6.7) $T = f(h) = \text{const}$ при $h > 0$. Тогда (6.6) и (6.7) определяют таутохронную кривую l : время, за которое материальная точка скатывается до положения $C(z_0, 0)$, не зависит от её исходного положения на кривой.

Будем искать непрерывное решение φ уравнения

$$\int_0^h \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{h-y}} = \sqrt{2g} \cdot T, \quad h > 0, \quad T = \text{const}. \quad (6.8)$$

Разделим уравнение (6.8) на $\sqrt{s-h}$ (полагаем здесь $s > h$) и проинтегрируем по h от 0 до s :

$$\begin{aligned} \sqrt{2g}T \int_0^s \frac{dh}{\sqrt{s-h}} &= \int_0^s \left(\int_0^h \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{h-y}} \right) \frac{dh}{\sqrt{s-h}} = \\ &= \int_0^s \left(\int_y^s \frac{dh}{\sqrt{s-h}\sqrt{h-y}} \right) \varphi(y) dy. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Изменение порядка интегрирования в (6.9) требует обоснования, т.к. интеграл несобственный (см. [15], Гл. 16, §5). Выполним замену переменной интегрирования в правой части (6.9): $h = y + (s-y) \cdot \tau$.

$$\int_y^s \frac{dh}{\sqrt{s-h}\sqrt{h-y}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau}\sqrt{\tau}} = \mathbf{B} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \pi \quad (\text{здесь } \mathbf{B} - \text{бета-}$$

функция). Тогда (6.9) примет вид $\frac{\sqrt{2g}}{\pi}T \cdot 2\sqrt{s} = \int_0^s \varphi(y)dy$. Дифференцируя по s , получаем $\varphi(s) = \sqrt{\frac{2g}{s}} \cdot \frac{T}{\pi}$, $s > 0$.

Таутохрона задаётся уравнением (6.6):

$$(q'(y))^2 + 1 = \frac{2g}{y} \left(\frac{T}{\pi}\right)^2, \quad q(0) = z_0.$$

Это уравнение обращённой выпуклостью вниз циклоиды (см. [3], Введение, §6; см. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Т2, Гл.3, §8). ■

6.2.2. Решение уравнения Абеля.

Вернёмся к нашим обычным обозначениям и решим уравнение Абеля более общего вида, чем уравнение (6.7):

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^\alpha} = f(x), \quad x \geq 0, \quad \alpha = \text{const}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6.10)$$

Нижний предел интегрирования выбран равным нулю лишь для упрощения формул. Специальный вид ядра интегрального оператора позволяет найти решение φ в явном виде.

Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема. Будем искать непрерывное решение φ . Разделим уравнение (6.10) на $(s-x)^{1-\alpha}$ (полагаем $s > x$) и проинтегрируем по x от 0 до s :

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{f(x)dx}{(s-x)^{1-\alpha}} &= \int_0^s \left(\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^\alpha} \right) \frac{dx}{(s-x)^{1-\alpha}} = \\ &= \int_0^s \left(\int_y^s \frac{dx}{(s-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} \right) \varphi(y)dy. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Изменение порядка интегрирования в (6.11) требует обоснования, т.к. интеграл несобственный. Выполним замену переменной интегрирования в правой части (6.11): $x = y + (s-y) \cdot \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_y^s \frac{dx}{(s-x)^{1-\alpha} \cdot (x-y)^\alpha} &= \int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha} \cdot \tau^\alpha} = \mathbf{B}(1-\alpha, \alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \end{aligned} \quad (6.12)$$

— не зависит от y (здесь Γ — гамма-функция, B — бета-функция). Поэтому уравнение (6.11) имеет вид

$$\int_0^s \varphi(y) dy = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^s \frac{f(x) dx}{(s-x)^{1-\alpha}}. \quad (6.13)$$

Чтобы найти функцию φ , надо продифференцировать равенство (6.13) по s . Если предположить, что существует непрерывная функция φ , которая удовлетворяет (6.13), то левую часть этого равенства можно дифференцировать; тогда получим

$$\varphi(s) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \cdot \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{f(x) dx}{(s-x)^{1-\alpha}}. \quad (6.14)$$

Но надо еще проверить, что полученная таким образом функция φ существует и непрерывна, т.к. интеграл в (6.14) несобственный. Заметьте, что интеграл в (6.14) нельзя дифференцировать по формуле Лейбница, поскольку это привело бы к расходящемуся интегралу.

Можно получить другой вид формулы обращения уравнения (6.10).

Утверждение 6.3.

Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение (6.10) имеет единственное непрерывное при $s > 0$ решение φ , и его можно представить формулой

$$\varphi(s) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \int_0^s \frac{f'(x) dx}{(s-x)^{1-\alpha}} \right]. \quad (6.15)$$

Доказательство.

Для упрощения выкладок (и только для этого!) проведем сначала доказательство формулы (6.15) при условии $f(0) = 0$. Подставим выражение $\varphi(s) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \cdot \int_0^s \frac{f'(x) dx}{(s-x)^{1-\alpha}}$ в интеграл $\int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^\alpha}$ и введём следующую функцию ω :

$$\omega(x) = f(x) - \int_0^x \left(\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^y \frac{f'(\tau) d\tau}{(y-\tau)^{1-\alpha}} \right) \frac{dy}{(x-y)^\alpha}. \quad (6.16)$$

Разделим обе части равенства (6.16) на $(s-x)^\alpha$ (полагаем $s > x$) и проинтегрируем по x от 0 до s : $\int_0^s \frac{\omega(x) dx}{(s-x)^\alpha} = \int_0^s \frac{f(x) dx}{(s-x)^\alpha} - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^s \frac{\mathcal{I}(x) dx}{(s-x)^\alpha},$

где $\mathcal{I}(x) = \int_0^x dy \int_0^y \frac{f'(\tau) d\tau}{(y - \tau)^{1-\alpha} \cdot (x - y)^\alpha}$. Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле: $\mathcal{I}(x) = \int_0^x f'(\tau) d\tau \int_\tau^x \frac{dy}{(x - y)^\alpha \cdot (y - \tau)^{1-\alpha}} =$
 $= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \cdot (f(x) - f(0))$ (см. (6.12)). По условию $f(0) = 0$, поэтому $\int_0^s \frac{\omega(x) dx}{(s - x)^\alpha} = 0$ при всех $s > 0$. Разделим последнее равенство на $(u - s)^{1-\alpha}$ (полагаем $u > s$) и проинтегрируем по s от 0 до u : $\int_0^u \frac{ds}{(u - s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\omega(x) dx}{(s - x)^\alpha} = \int_0^u \omega(x) dx \int_x^u \frac{ds}{(u - s)^{1-\alpha} \cdot (s - x)^\alpha} =$
 $= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \cdot \int_0^u \omega(x) dx = 0$. Итак, при любом значении $u > 0$ имеем $\int_0^u \omega(x) dx = 0$. Отсюда $\omega(x) \equiv 0$, т.е. при условии $f(0) = 0$ формула (6.15) даёт решение уравнения (6.10).

Для доказательства формулы (6.15) при $f(0) \neq 0$ как и выше подставим выражение φ по (6.15) в интеграл $\int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{(x - y)^\alpha}$ и введём функцию

$$\zeta(x) = \omega(x) - \int_0^x \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \cdot \frac{f(0) dy}{y^{1-\alpha} \cdot (x - y)^\alpha} = \omega(x) - f(0), \quad (6.17)$$

где $\omega(x)$ определена в (6.16). Разделим обе части равенства (6.17) на $(s - x)^\alpha$ и проинтегрируем по x от 0 до s . Тогда получим $\int_0^s \frac{\zeta(x) dx}{(s - x)^\alpha} = 0$ при всех $s > 0$. Отсюда следует $\zeta(x) \equiv 0$, т.е. формула (6.15) даёт решение уравнения (6.10). ■

Замечание 6.6.

В уравнении (6.10) вовсе не обязательно требовать, чтобы $f(0) = 0$ ■

Задача 6.1.

Пусть в уравнении (6.10) $f(x) = Ax + B$, где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$. Постройте решение φ по формуле (6.14); по формуле (6.15). ■

6.2.3. Уравнения типа Абеля.

Наряду с уравнениями вида (6.10) важное прикладное значение имеют уравнения, которые называют уравнениями типа Абеля. Они появляются в задачах, связанных с измерениями и наблюдениями (в задаче о распределении масс в галактиках; в диагностике плазмы в

случае осевой симметрии плазменного шнура; и др.). Приведём два примера уравнений типа Абеля относительно искомой функции φ с известной функцией f .

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = f(x), \quad x \geq 0. \quad (6.18)$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{2\varphi(y)ydy}{\sqrt{y^2 - x^2}} = f(x), \quad x \geq 0. \quad (6.19)$$

В некоторых случаях можно считать, что $\varphi(x) = 0$ при $x > b$. Тогда уравнение (6.19) имеет вид

$$\int_x^b \frac{2\varphi(y)ydy}{\sqrt{y^2 - x^2}} = f(x), \quad 0 \leq x \leq b. \quad (6.20)$$

Построим формулу обращения уравнения (6.18) для нахождения его непрерывного решения φ .

Умножим обе части уравнения (6.18) на $\frac{2x}{\sqrt{s^2 - x^2}}$ (полагаем $s > x$) и проинтегрируем по x от 0 до s :

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{2xf(x)dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} &= \int_0^s \left(\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) \cdot \frac{2xdx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = \\ &= \int_0^s \left(\int_y^s \frac{2xdx}{\sqrt{s^2 - x^2}\sqrt{x^2 - y^2}} \right) \varphi(y)dy. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Изменение порядка интегрирования в (6.21) требует обоснования, т.к. интеграл несобственный. Выполним замену переменной интегрирования в правой части (6.21): $x^2 = y^2 + (s^2 - y^2) \cdot \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_y^s \frac{2xdx}{\sqrt{s^2 - x^2}\sqrt{x^2 - y^2}} &= \int_{y^2}^{s^2} \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 - \eta}\sqrt{\eta - y^2}} = \\ &= \int_0^1 \frac{(s^2 - y^2)d\tau}{\sqrt{s^2 - y^2}\sqrt{1 - \tau}\sqrt{s^2 - y^2}\sqrt{\tau}} = \pi \quad (\text{см. (6.12)}). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (6.21) имеет вид

$$\int_0^s \varphi(y)dy = \frac{2}{\pi} \int_0^s \frac{xf(x)dx}{\sqrt{s^2 - x^2}}. \quad (6.22)$$

Чтобы найти функцию φ , надо продифференцировать равенство (6.22) по s . Если предположить, что существует непрерывная функция φ , которая удовлетворяет (6.22), то левую часть этого равенства можно дифференцировать; тогда получим

$$\varphi(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{x f(x) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}}. \quad (6.23)$$

Но надо ещё проверить, что полученная таким способом функция φ существует и непрерывна. Интеграл в (6.23) нельзя дифференцировать по формуле Лейбница, поскольку это привело бы к расходящемуся интегралу.

Можно получить другой вид формулы обращения уравнения (6.18).

Утверждение 6.4.

Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение (6.18) имеет единственное непрерывное при $s \geq 0$ решение φ , и его можно представить формулой

$$\varphi(s) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + s \cdot \int_0^s \frac{f'(x) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} \right]. \quad (6.24)$$

Доказательство.

Подставим выражение φ по (6.24) в интеграл $\int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ и введём следующую функцию ζ :

$$\zeta(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x \left(\frac{2y}{\pi} \int_0^y \frac{f'(\tau) d\tau}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} \right) \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad (6.25)$$

(здесь учтено, что $\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2}$). Разделим обе части равенства (6.25) на $\sqrt{s^2 - x^2}$ (полагаем $s > x$) и проинтегрируем по x от 0 до s : $\int_0^s \frac{\zeta(x) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = \int_0^s \frac{(f(x) - f(0)) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{\mathcal{I}_1(x) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}}$,

где $\mathcal{I}_1(x) = \int_0^x 2y dy \int_0^y \frac{f'(\tau) d\tau}{\sqrt{y^2 - \tau^2} \sqrt{x^2 - y^2}}$. Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле: $\mathcal{I}_1(x) = \int_0^x f'(\tau) \cdot \mathcal{I}_2 d\tau$, где

$$\mathcal{I}_2 = \int_{\tau}^x \frac{2y dy}{\sqrt{y^2 - \tau^2} \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

В интеграле $\mathcal{I}_2$ выполним замену переменной интегрирования: вместо y введём переменную ξ по правилу

$y^2 = \tau^2 + (x^2 - \tau^2) \cdot \xi$. Тогда $2ydy = (x^2 - \tau^2)d\xi$, $y^2 - \tau^2 = (x^2 - \tau^2) \cdot \xi$,
 $x^2 - y^2 = (x^2 - \tau^2) \cdot (1 - \xi)$. Отсюда $\mathcal{I}_2 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}\sqrt{1-\xi}} = \mathbf{B}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$
(см. (6.12)).

Поэтому $\mathcal{I}_1(x) = \pi \int_0^x f'(\tau)d\tau = \pi(f(x) - f(0))$. Следовательно,
 $\int_0^s \frac{\zeta(x)dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = 0$ при всех $s > 0$. Умножим последнее равенство на
 $\frac{2s}{\sqrt{u^2 - s^2}}$ (полагаем $u > s$) и проинтегрируем по s от 0 до u :
 $\int_0^u \frac{2sds}{\sqrt{u^2 - s^2}} \int_0^s \frac{\zeta(x)dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = \int_0^u \zeta(x)dx \int_x^u \frac{2sds}{\sqrt{u^2 - s^2}\sqrt{s^2 - x^2}} = \mathcal{I}_2 \cdot \int_0^u \zeta(x)dx = 0$.
Итак, при любом значении $u > 0$ имеем $\int_0^u \zeta(x)dx = 0$. Отсюда $\zeta(x) \equiv 0$,

т.е. формула (6.24) даёт решение уравнения (6.18).■

Задача 6.2.

Пусть в уравнении (6.18) $f(x) = Ax + B$, где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.
Постройте решение φ по формуле (6.23); по формуле (6.24).■

Построим формулу обращения уравнения (6.20) для нахождения
его непрерывного решения φ . Умножим обе части уравнения (6.20)
на $\frac{x}{\sqrt{x^2 - s^2}}$ (полагаем $0 \leq s < x$) и проинтегрируем по x от s до b :

$$\begin{aligned} \int_s^b \frac{xf(x)dx}{\sqrt{x^2 - s^2}} &= \int_s^b \left(\int_x^b \frac{2\varphi(y)ydy}{\sqrt{y^2 - x^2}} \right) \cdot \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - s^2}} = \\ &= \int_s^b \left(\int_s^y \frac{xdx}{\sqrt{y^2 - x^2}\sqrt{x^2 - s^2}} \right) \cdot 2\varphi(y)ydy. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Изменение порядка интегрирования в (6.26) требует обоснования, т.к.
интеграл несобственный. Выполним замену переменной интегрирова-
ния в правой части (6.26): $2x^2 = (y^2 + s^2) + (y^2 - s^2) \cdot \tau$. Тогда
 $xdx = \frac{y^2 - s^2}{4} \cdot d\tau$, $y^2 - x^2 = \frac{y^2 - s^2}{2} \cdot (1 - \tau)$, $x^2 - s^2 = \frac{y^2 - s^2}{2} \cdot (1 + \tau)$,

$$\begin{aligned} \text{и } \int_s^y \frac{xdx}{\sqrt{y^2 - x^2}\sqrt{x^2 - s^2}} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau}\sqrt{1 + \tau}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \tau \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (6.26) имеет вид

$$\int_s^b \varphi(y)ydy = \frac{1}{\pi} \int_s^b \frac{xf(x)dx}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (6.27)$$

Чтобы найти функцию φ , надо продифференцировать равенство (6.27) по s . Если предположить, что существует непрерывная функция φ , которая удовлетворяет (6.27), то левую часть этого равенства можно дифференцировать; тогда получим

$$\varphi(s) = -\frac{1}{\pi s} \cdot \frac{d}{ds} \int_s^b \frac{xf(x)dx}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (6.28)$$

Как и в случае формул (6.14) и (6.23), формула (6.28) доказывает **единственность** решения φ в классе непрерывных функций при $0 < s < b$.

6.2.4. Дифференцирование дробного порядка.

Переформулируем задачу вычисления производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, записав её в виде интегрального уравнения 1-го рода:

$$\int_a^x \varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.29)$$

Для существования непрерывного решения φ уравнения (6.29) мало одной лишь непрерывности функции f . Функция f должна иметь непрерывную производную при $a \leq x \leq b$ и удовлетворять требованию $f(a) = 0$. При выполнении этих условий существует единственное непрерывное решение $\varphi(x) = f'(x)$.

Задачу вычисления производной порядка $n \in \mathbb{N}$ функции f на отрезке $[a, b]$ можно переформулировать в виде интегрального уравнения

$$\int_a^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.30)$$

Это следует из доказанной в главе 3 леммы 3.1: для непрерывной на $[a, b]$ функции φ выполнено равенство

$$\int_a^x dy_{n-1} \int_a^{y_{n-1}} dy_{n-2} \cdots \int_a^{y_1} \varphi(y)dy = \int_a^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(y)dy. \quad (6.31)$$

Для существования непрерывного решения φ уравнения (6.30) мало одной лишь непрерывности функции f . Функция f должна иметь непрерывные производные $f^{(i)}(x)$, $i = 1, \dots, n$, при $a \leq x \leq b$, причём $f^{(i)}(a) = 0$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. При выполнении этих условий существует единственное решение уравнения (6.30): $\varphi(x) = f^{(n)}(x)$.

Введём обозначение интегрального оператора в правой части равенства (6.31):

$$(\mathcal{I}_n \varphi)(x) = \int_a^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(y) dy.$$

Равенство (6.31) означает $(\mathcal{I}_n \varphi)(x) = \int_a^x (\mathcal{I}_{n-1} \varphi)(y) dy$, т.е. $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_{n-1}$.

Учтём, что $(n-1)! = \Gamma(n)$ (Γ — гамма-функция) и заметим, что выражение

$$(\mathcal{I}_\alpha \varphi)(x) = \int_a^x \frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(y) dy$$

имеет смысл при всех $\alpha > 0$. Оператор $\mathcal{I}_\alpha$ называют оператором дробного интегрирования или интегралом Римана–Лиувилля порядка α от функции φ с началом в точке a . Оператор $\mathcal{I}_\alpha$ линеен и обладает свойством

$$\left(\mathcal{I}_\alpha (\mathcal{I}_\beta \varphi) \right)(x) = (\mathcal{I}_{\alpha+\beta} \varphi)(x). \quad (6.32)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^y \frac{(y-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \varphi(s) ds \right) dy = \\ & = \int_a^x \frac{\varphi(s)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\int_s^x (x-y)^{\alpha-1} \cdot (y-s)^{\beta-1} dy \right) ds. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Выполняя замену переменной интегрирования $y = s + (x-s) \cdot \tau$, получим $\int_s^x (x-y)^{\alpha-1} \cdot (y-s)^{\beta-1} dy = (x-s)^{\alpha+\beta-1} \cdot \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \cdot \tau^{\beta-1} d\tau = (x-s)^{\alpha+\beta-1} \cdot \mathbf{B}(\alpha, \beta) = (x-s)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Отсюда и следует (6.32).

Интегральный оператор $\mathcal{I}_\alpha$ является свёрткой функций $\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ и $\varphi(x)$ (можно считать, что при $x < a$ обе функции заменяются нулём). При некоторых требованиях к функции φ существуют операторы $\mathcal{I}_\alpha$ с началом $a = -\infty$. Строго определить интегральный оператор $\mathcal{I}_\alpha$ и изучить его свойства можно только указав, каким функциональным пространствам принадлежат $Dom \mathcal{I}_\alpha$ и $Ran \mathcal{I}_\alpha$. В частности, проведённое

в (6.33) изменение порядка интегрирования требует некоторых предположений о функции φ .

Операцию, обратную дробному интегрированию, называют дробным дифференцированием порядка α : функцию φ называют дробной производной порядка α от функции f , если она является решением интегрального уравнения 1-го рода

$$(\mathcal{I}_\alpha \varphi)(x) = f(x), \quad x \geq a. \quad (6.34)$$

При $0 < \alpha < 1$ производная порядка α от функции f удовлетворяет уравнению Абеля:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_a^x \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x \geq a.$$

Если функция f непрерывно дифференцируема, то его решение можно выразить по формуле (см. (6.14))

$$\varphi(s) = \Gamma(\alpha) \cdot \frac{\sin(\pi(1-\alpha))}{\pi} \cdot \frac{d}{ds} \int_a^s \frac{f(x) dx}{(s-x)^\alpha}, \quad s > a,$$

или по формуле (см. (6.15))

$$\varphi(s) = \Gamma(\alpha) \cdot \frac{\sin(\pi(1-\alpha))}{\pi} \left[\frac{f(a)}{(s-a)^\alpha} + \int_a^s \frac{f'(x) dx}{(s-x)^\alpha} \right], \quad s > a.$$

Решение φ уравнения (6.34) обозначим через $(D_\alpha f)(x)$. При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеем $D_n = \frac{d^n}{dx^n}$. Пусть $n < \alpha < n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, пользуясь равенством (6.32), можно записать уравнение (6.34) в виде

$$(\mathcal{I}_\alpha \varphi)(x) = \left(\mathcal{I}_n (\mathcal{I}_{\alpha-n} \varphi) \right)(x) = \left(\mathcal{I}_{\alpha-n} (\mathcal{I}_n \varphi) \right)(x) = f(x),$$

и если функция f удовлетворяет надлежащим требованиям, то

$$\varphi(x) = \left(D_{\alpha-n} \left(\frac{d^n}{dx^n} f \right) \right)(x) = \left(\frac{d^n}{dx^n} (D_{\alpha-n} f) \right)(x).$$

Вообще: $\left(D_\alpha (D_\beta f) \right)(x) = (D_{\alpha+\beta} f)(x)$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Замечание 6.7.

Все введённые здесь операторы D_α и соотношения между ними понимаются в смысле построения решений уравнений вида (6.34). Они

имеют смысл только в случае разрешимости этих уравнений. Например, уравнение $\int_a^x \varphi(y)dy = c = \text{const}$ разрешимо только при $c = 0$; поэтому равенство $(D_1 c)(x) = \frac{dc}{dx} = 0$ верно только при $c = 0$. ■

6.3. Линейные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода с приближённо заданной правой частью.

При практическом решении количественных задач приходится рассматривать их не как нахождение решения индивидуального уравнения (или какой-либо другой индивидуальной задачи), а как массовую проблему. Например, в уравнении 1-го рода $A\varphi = f$ может быть фиксирован оператор A , действующий из нормированного пространства Φ в нормированное пространство Ψ , а входной информацией каждой конкретной задачи является приближённо заданный элемент $\tilde{f} \in \Psi$. Таким приближённым элементом может быть функция, полученная из эксперимента и содержащая погрешности измерений. Требуется уметь решать это уравнение для **всех** $f \in \Psi$.

Определение 6.3.

Задачу (массовую проблему) называют **корректно поставленной** на паре пространств Φ и Ψ , если выполнены следующие требования.

- 1°. Для любого элемента $f \in \Psi$ решение $\varphi \in \Phi$ существует.
- 2°. Для любого элемента $f \in \Psi$ решение $\varphi \in \Phi$ единственно.
- 3°. Решение φ непрерывно зависит от входной информации: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $\|f - \tilde{f}\|_\Psi < \delta$, то $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\Phi < \varepsilon$. (Если речь идёт о решении уравнения 1-го рода, то здесь $A\varphi = f, A\tilde{\varphi} = \tilde{f}$.) ■

Пример 6.3.

Пусть в уравнении Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \mu \cdot \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.35)$$

ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S , под f понимается любая непрерывная на $[a, b]$ функция, и ищется непрерывное на $[a, b]$ решение φ . Реальной входной информацией может быть приближённая функция $\tilde{f}$, по которой надо построить приближённое решение $\tilde{\varphi}$.

Если μ — правильное значение ядра $\mathcal{K}$, то задача корректна в паре нормированных пространств $\Phi = C[a, b]$, $\Psi = C[a, b]$. Действительно, для фиксированного правильного значения μ имеем единственное непрерывное решение

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \cdot \int_a^b \Gamma(x, y; \mu)f(y)dy,$$

где резольвента Фредгольма Γ является непрерывной функцией от x, y в замкнутом квадрате S . Пусть $N = \max_{(x,y) \in S} |\Gamma(x, y; \mu)|$. Пусть имеются

непрерывные функции f и $\tilde{f}$, которым соответствуют непрерывные решения φ и $\tilde{\varphi}$. Тогда для всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq |f(x) - \tilde{f}(x)| + |\mu| \cdot \int_a^b |\Gamma(x, y; \mu)| \cdot |f(y) - \tilde{f}(y)| dy,$$

из которого следует неравенство

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[a,b]} \leq (1 + |\mu| \cdot N \cdot (b - a)) \cdot \|f - \tilde{f}\|_{C[a,b]}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{1 + |\mu| \cdot N \cdot (b - a)}$, и тогда из неравенства $\|f - \tilde{f}\|_{C[a,b]} < \delta$ будет следовать неравенство $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[a,b]} < \varepsilon$.

Корректность задачи означает, что в случае задания приближённой к f функции $\tilde{f}$ в качестве приближённого к φ решения можно брать точное решение уравнения (6.35) с правой частью $\tilde{f}$. ■

Задачи, в которых надо найти следствия по вызывающим их причинам, принято называть „прямыми“. Задачи, в которых по наблюдаемым следствиям надо восстановить их причину, называют „обратными“. Обратные задачи часто оказываются некорректными. Многие из них формулируются как массовая проблема: решить уравнение $A\varphi = f$ для **любой** правой части f . Рассмотрим пример такой массовой проблемы — интегральное уравнение 1-го рода с приближённо заданной правой частью.

Замечание 6.8.

В примерах такого рода оператор $A : \Phi \rightarrow \Psi$ часто оказывается вполне непрерывным. Для вполне непрерывного оператора, действующего в бесконечномерных пространствах, не существует непрерывного обратного оператора (см. следствие 4.1). В этом случае задача решения уравнения $A\varphi = f$ будет некорректной. ■

Задачу решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.36)$$

будем понимать в следующем смысле: для **любой** функции $f \in \Psi = C[a, b]$ требуется найти решение $\varphi \in \Phi = C[a, b]$.

Пусть заданное ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом квадрате S и имеет непрерывные производные $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial y}$ в S . Тогда $A : \Phi \rightarrow \Psi$.

Задача (6.36) является некорректной в такой паре пространств. В самом деле: решение уравнения (6.36) существует не для любой функции $f \in C[a, b]$, поскольку $Ran A \neq C[a, b]$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать функцию f , непрерывную на $[a, b]$, но не являющуюся дифференцируемой на $[a, b]$. Для такой правой части уравнение (6.36) не имеет непрерывного решения, поскольку при сделанных предположениях о ядре $\mathcal{K}$ для любой непрерывной функции φ функция $(A\varphi)(x)$ будет непрерывно дифференцируемой.

Покажем, что в задаче (6.36) нарушается требование непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Пусть $(A\varphi_0)(x) = f_0(x)$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + n \cdot \sin(n^2 x)$, $n \in \mathbb{N}$. Эти функции являются решениями уравнения (6.36) с правыми частями $f_n(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \varphi_n(y) dy$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_0(x) &= \int_a^b \mathcal{K}(x, y) \cdot n \cdot \sin(n^2 y) dy = \\ &= -\mathcal{K}(x, y) \frac{\cos(n^2 y)}{n} \Big|_{y=a}^{y=b} + \int_a^b \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\cos(n^2 y)}{n} dy. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Введём обозначения $M = \max_{(x, y) \in S} |\mathcal{K}(x, y)|$ и $M_y = \max_{(x, y) \in S} \left| \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial y} \right|$. Тогда из (6.37) следует неравенство

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_0(x)| &\leq \left| \mathcal{K}(x, b) \frac{\cos(n^2 b)}{n} \right| + \left| \mathcal{K}(x, a) \frac{\cos(n^2 a)}{n} \right| + \\ &+ \int_a^b \left| \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\cos(n^2 y)}{n} \right| dy \leq \frac{2M}{n} + \frac{M_y \cdot (b - a)}{n} = \frac{\varkappa}{n}, \end{aligned}$$

где постоянная $\varkappa$ не зависит от x . Отсюда $\|f_n - f_0\|_{C[a, b]} \leq \frac{\varkappa}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Но при этом $\|\varphi_n - \varphi_0\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |n \cdot \sin(n^2 x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Единственность или неединственность решения уравнения (6.36) определяется конкретным ядром $\mathcal{K}$. Решение линейного уравнения (6.36) будет единственным при **любой** правой части $f \in \Psi$ в том и только в том случае, если однородное уравнение $(A\varphi)(x) \equiv 0$ имеет только решение $\varphi(x) \equiv 0$, т.е. если $Ker A = 0$.

Задача 6.3.

Приведите примеры интегральных операторов A , для которых $Ker A = 0$; для некоторых $Ker A \neq 0$. ■

Допустим, что для некоторой функции f существует решение φ

уравнения (6.36). Пусть эта функция нам неизвестна, а вместо неё дано лишь некоторое её приближение $\tilde{f}$, мало отличающееся от f (т.е. величина $\|f - \tilde{f}\|_{\Psi}$ мала). Тогда можно искать лишь приближённое к φ решение $\tilde{\varphi}$. Но если функция $\tilde{f}$ получена из эксперимента, то она может не быть гладкой, и тогда для этой $\tilde{f}$ непрерывного решения $\tilde{\varphi}$ не существует. Если же $\tilde{f}$ гладкая функция, и непрерывное решение $\tilde{\varphi}$ существует, то оно может очень сильно отличаться от точного решения φ из-за неустойчивости (т.е. величина $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\Phi}$ может быть велика). Наконец, в случае неединственности решения задача становится неопределённой.

Поскольку задача не является корректной, в качестве приближённого к φ решения $\tilde{\varphi}$ нельзя стремиться найти точное решение уравнения (6.36) с приближённо известной правой частью $\tilde{f}$. Возникает принципиальный вопрос: что надо понимать под приближённым решением уравнения (6.36), если его правая часть известна лишь приближённо?

Идея построения решений некорректных задач состоит в использовании величины погрешности входной информации. Пусть вместо точной правой части f в уравнении (6.36) мы имеем функцию $\tilde{f}_{\delta}$, для которой $\|f - \tilde{f}_{\delta}\|_{\Psi} \leq \delta$ (величина δ предполагается известной). А.Н. Тихонов* разработал методы решения некорректных задач на основе понятия **регуляризирующего оператора**.

Определение 6.4.

Оператор $R(f, \alpha)$, зависящий от параметра α , называют регуляризирующим для уравнения (6.36), если он обладает следующими свойствами.

1°. Оператор $R(f, \alpha)$ определен для любого значения $\alpha > 0$ и для любой функции $f \in \Psi$.

2°. Если $A\varphi = f$, то существует такая функция $\alpha = \alpha(\delta)$, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что из неравенства $\|f - \tilde{f}_{\delta}\|_{\Psi} \leq \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\|\varphi - R(\tilde{f}_{\delta}, \alpha(\delta))\|_{\Phi} \leq \varepsilon$. ■

В качестве приближённого решения уравнения (6.36) надо брать функцию $\varphi_{\alpha} = R(\tilde{f}_{\delta}, \alpha(\delta))$, где значение параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ **согласовано** с точностью δ задания функции $\tilde{f}_{\delta}$. Такое решение φ_{α} называют регуляризованным решением уравнения (6.36). Параметр α называют параметром регуляризации.

Методы построения регуляризирующих операторов и методы выбора параметра регуляризации изучаются в курсе обратных и некорректно поставленных задач (см. [5,18]).

* Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993) — советский математик.

Глава 7.

Линейные интегральные уравнения 2-го рода со слабой особенностью ядра.

7.1. Операторы со слабой особенностью в случае многих независимых переменных.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$, $l \geq 1$, $\vec{x} \in \Omega$, $\vec{y} \in \Omega$. Вместо квадрата S в $\mathbb{R}^2$, который рассматривался в предыдущих главах, введём множество $\Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^{2l}$. Пусть $Q(\vec{x}, \vec{y})$ — заданная на $\Omega \times \Omega$ **ограниченная** функция. Через $|\vec{x} - \vec{y}|$ обозначим евклидово расстояние между точками $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в $\mathbb{R}^l$. Ядро

$$\mathcal{K}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{Q(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^\alpha}, \quad (7.1)$$

где $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < l$, называют ядром со слабой особенностью.

Будем опускать стрелочки в обозначениях векторов из $\mathbb{R}^l$; так что далее полагаем $x \in \mathbb{R}^l$, $y \in \mathbb{R}^l$. Ядро (7.1) задаёт линейный интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy$, действующий на функции φ

от l независимых скалярных переменных; интеграл здесь l -кратный, а dy обозначает элемент объёма $d\Omega_{\vec{y}}$. Такой оператор называют оператором со слабой особенностью.

В данной главе будем изучать линейные уравнения 2-го рода

$$\varphi(x) - \mu \cdot \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^l, \quad (7.2)$$

со слабой особенностью ядра $\mathcal{K}$. Интеграл в (7.2) понимаем в смысле Лебега. Напомним некоторые свойства интеграла Лебега.

Свойство 7.1.

Если функция $G(x)$ интегрируема на множестве Ω , а функция $F(x)$ измерима на Ω , и почти всюду выполнено неравенство $|F(x)| \leq G(x)$, то и функция $F(x)$ интегрируема на Ω , и справедливо неравенство $\int_{\Omega} |F(x)|dx \leq \int_{\Omega} G(x)dx$. ■

Свойство 7.2.

Интегралы $\int_{\Omega} F(x)dx$ и $\int_{\Omega} |F(x)|dx$ существуют или не существуют одновременно. ■

Свойство 7.3 (теорема Фубини).

Если функция $H(x, y)$, заданная в $\Omega \times \Omega$, измерима, и существует хотя бы один из повторных интегралов $\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |H(x, y)|dy \right) dx < \infty$ или

$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |H(x, y)| dx \right) dy < \infty$, то функция $H(x, y)$ интегрируема на $\Omega \times \Omega$ (т.е. существует „двойной“ интеграл $\int_{\Omega \times \Omega} H(x, y) dx dy$).

Если функция $H(x, y)$ интегрируема на $\Omega \times \Omega$, то для почти всех $x \in \Omega$ существует $\int_{\Omega} H(x, y) dy < \infty$, для почти всех $y \in \Omega$ существует $\int_{\Omega} H(x, y) dx < \infty$, оба эти интеграла интегрируемы (по x ; по y) на Ω , и справедливы равенства

$$\int_{\Omega \times \Omega} H(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} H(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} H(x, y) dx \right) dy. \blacksquare$$

Замечание 7.1.

Если функция $H(x, y)$ не является интегрируемой на $\Omega \times \Omega$, то повторные интегралы могут не существовать или не быть равными. Из существования повторных интегралов и из их равенства ещё не следует интегрируемость функции $H(x, y)$ на $\Omega \times \Omega$.

Рассмотрите следующие примеры:

$$1^\circ. \Omega = [0, 1], H(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, x \in \Omega, y \in \Omega;$$

$$2^\circ. \Omega = [-1, 1], H(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, x \in \Omega, y \in \Omega. \blacksquare$$

Свойство 7.4.

Произведение двух функций $F(x)$ и $G(x)$, принадлежащих $L_2(\Omega)$, есть функция, интегрируемая на множестве Ω в смысле Лебега.

Доказательство вытекает из неравенства $|F(x)G(x)| \leq \frac{1}{2} \left((F(x))^2 + (G(x))^2 \right)$ и свойств интеграла Лебега. $\blacksquare$

Свойство 7.5.

Если функция $F \in L_2(\Omega)$, и мера множества Ω конечна, то функция F интегрируема по Лебегу на Ω (т.е. $F \in L_1(\Omega)$).

Доказательство вытекает из свойства 7.4, если положить $G(x) \equiv 1$. $\blacksquare$

Утверждение 7.1.

Если $0 < \alpha < \frac{l}{2}$, то ядро со слабой особенностью является фредгольмовым и удовлетворяет условию

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy < \infty. \quad (7.3)$$

Доказательство.

Пусть $|Q(x, y)| \leq M = \text{const}$ всюду в $\Omega \times \Omega$. Тогда для любой точки $x \in \Omega$ выполнено неравенство $\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy = \int_{\Omega} \frac{|Q(x, y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} dy \leq$

$\leq M^2 \cdot \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{2\alpha}}$. Обозначим через Δ диаметр области Ω : $\Delta = \sup_{x \in \Omega, y \in \Omega} |x-y|$. Для любой точки $x \in \Omega$ замкнутая ограниченная область Ω принадлежит шару радиуса Δ с центром в x : $\Omega \subset \{y \in \mathbb{R}^l \mid |x-y| \leq \Delta\}$. Фиксируем точку $x \in \Omega$ и введём в $\mathbb{R}^l$ сферические координаты с центром в x . Пусть σ — сфера в $\mathbb{R}^l$ радиуса 1 с центром в x : $\sigma = \{y \in \mathbb{R}^l \mid |x-y| = 1\}$, $|\sigma| = \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})}$ —

площадь её поверхности, $d\sigma$ — элемент площади её поверхности. Тогда имеем выражение в сферической системе координат для элемента объёма в $\mathbb{R}^l$: $dy = d\Omega_{\vec{y}} = r^{l-1} dr d\sigma$, где $r = |x-y|$. Получаем оценку интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{2\alpha}} &\leq \int_{r \leq \Delta} \frac{dy}{r^{2\alpha}} = \int_{r \leq \Delta} \frac{r^{l-1} dr d\sigma}{r^{2\alpha}} = \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{\Delta} r^{l-1-2\alpha} dr = \\ &= \frac{|\sigma| \cdot \Delta^{l-2\alpha}}{l-2\alpha} = C(2\alpha) = \text{const}. \end{aligned}$$

Отсюда $\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \leq M^2 \cdot C(2\alpha) = \text{const}$, т.е. ядро $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию (7.3).

Постоянная функция $G(x) = \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy = \text{const}$ интегрируема на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, имеющей конечную меру Лебега („объём“). Поэтому по свойству 7.1 функция $F(x) = \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$ интегрируема на Ω , т.е. существует повторный

интеграл $\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right) dx$. По теореме Фубини существует „двойной“ интеграл $\int_{\Omega \times \Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty$, т.е. ядро $\mathcal{K}$ фредгольмово. ■

Замечание 7.2.

В примере 1.8 было показано, что при $l = 1$ ядро со слабой особенностью является фредгольмовым. А условие (7.3) при $l = 1$ использовано в теореме 2.6. ■

Утверждение 7.2.

Пусть $\mathcal{K}(x, y)$ — ядро со слабой особенностью, задающее оператор $(A\varphi)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$. Если функция $\varphi \in L_2(\Omega)$, то и функция $A\varphi \in L_2(\Omega)$. Тем самым оператор A можно рассматривать как действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Этот оператор ограничен.

Доказательство.

Сохраним обозначения из доказательства утверждения 7.1. Фиксируем произвольную точку $y \in \Omega$; тогда, повторяя рассуждения утвер-

ждения 7.1, получаем

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{|x-y|^{\alpha}} \leq \int_{r \leq \Delta} \frac{dx}{r^{\alpha}} = C(\alpha) = \frac{|\sigma| \cdot \Delta^{l-\alpha}}{l-\alpha} = \text{const.} \text{ Отсюда вытекает}$$

существование следующего повторного интеграла, если $\varphi \in L_2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}} dx \right) dy &= \int_{\Omega} |\varphi(y)|^2 \cdot \left(\int_{\Omega} \frac{dx}{|x-y|^{\alpha}} \right) dy \leq \\ &\leq C(\alpha) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Тогда по теореме Фубини функция $\frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}}$ интегрируема на $\Omega \times \Omega$, для почти всех $x \in \Omega$ существует $\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}} dy$, и этот интеграл интегрируем по x на Ω .

Докажем, что при почти всех $x \in \Omega$ функция $\mathcal{K}(x, y) \cdot \varphi(y)$ интегрируема по y на множестве Ω . Это следует из свойства 7.1. Действительно:

$$\begin{aligned} \text{но: } |\mathcal{K}(x, y)\varphi(y)| &= \frac{|Q(x, y)| \cdot |\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq M \cdot \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha/2}} \leq \\ &\leq \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}} + \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \right), \quad \text{т.к. } a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Для почти всех $x \in \Omega$ существует $\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}} dy$, и для всех $x \in \Omega$ существует

$\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}}$. По свойству 7.1 функция $\mathcal{K}(x, y) \cdot \varphi(y)$ интегрируема по y на Ω (при почти всех $x \in \Omega$). Таким образом, если $\varphi \in L_2(\Omega)$, то для почти всех $x \in \Omega$ определена функция $(A\varphi)(x)$.

Докажем, что $A\varphi \in L_2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(x)|^2 &= \left| \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy \right|^2 = \left| \int_{\Omega} \frac{Q(x, y)}{|x-y|^{\alpha}} \cdot \varphi(y) dy \right|^2 \leq \\ &\leq M^2 \cdot \left(\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha/2}} dy \right)^2 \leq \\ &\leq M^2 \cdot \int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}} dy \cdot \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}} \leq M^2 \cdot C(\alpha) \cdot \int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{\alpha}} dy \end{aligned} \quad (7.5)$$

— по неравенству Коши–Буняковского для функции $\frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha/2}} \in L_2(\Omega)$ и функции $\frac{1}{|x-y|^{\alpha/2}} \in L_2(\Omega)$ переменной y (при

фиксированном x). Как было доказано выше, интеграл $\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy$ интегрируем по x на Ω ; поэтому по свойству 7.1 из неравенства (7.5) вытекает интегрируемость функции $|(A\varphi)(x)|^2$ на множестве Ω , т.е. $A\varphi \in L_2(\Omega)$.

Докажем, что оператор A со слабой особенностью ограничен. Для этого проинтегрируем по Ω левую и правую части неравенства (7.5) и учтём, что $\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy \right) dx = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dx \right) dy \leq C(\alpha) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2$ согласно неравенству (7.4). Извлекая квадратный корень, получаем неравенство

$$\|A\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq M \cdot C(\alpha) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \quad (7.6)$$

т.е. оператор A ограничен. ■

Следствие 7.1.

Из (7.6) вытекает оценка нормы оператора A со слабой особенностью: $\|A\| \leq \frac{M \cdot |\sigma| \Delta^{l-\alpha}}{l-\alpha}$. ■

Утверждение 7.3.

Если область интегрирования Ω ограничена, то интегральный оператор со слабой особенностью, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, не только ограничен, но и вполне непрерывен. ■

Обоснование утверждения 7.3 требует привлечения некоторых фактов, доказательство которых даётся в курсе функционального анализа. Сформулируем их в виде следующих трёх лемм.

Пусть Φ и Ψ — линейные нормированные пространства, A и B — линейные операторы, действующие из Φ в Ψ . Суммой $A+B$ называют оператор с областью определения $Dom(A+B) = Dom A \cap Dom B$, заданный формулой $(A+B)\varphi = A\varphi + B\varphi$ для всех $\varphi \in Dom(A+B)$.

Лемма 7.1.

Пусть Φ и Ψ — линейные нормированные пространства, линейные операторы A и B действуют из Φ в Ψ и ограничены ($A, B \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$; см. раздел 4.1). Тогда и оператор $A+B$ ограничен, причём $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Доказательство.

Для любого элемента $\varphi \in Dom(A+B)$ выполнено неравенство $\|(A+B)\varphi\|_{\Psi} = \|A\varphi + B\varphi\|_{\Psi} \leq \|A\varphi\|_{\Psi} + \|B\varphi\|_{\Psi} \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|_{\Phi} + \|B\| \cdot \|\varphi\|_{\Phi} = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|\varphi\|_{\Phi}$. ■

Если линейные пространства Φ и Ψ заданы над полем чисел $\mathbb{P}$, а оператор $A \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$, то можно определить произведение αA оператора A на число $\alpha \in \mathbb{P}$ по правилу $(\alpha A)\varphi = \alpha \cdot (A\varphi)$ для всех $\varphi \in \Phi$.

По лемме 7.1 операция $A + B$ не выводит из класса ограниченных линейных операторов; операция αA также не выводит из этого класса (см. определение 4.5). Тем самым множество $\mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$. Это пространство нормировано (определение $\|A\|$ см. в разделе 4.1).

Лемма 7.2.

Пусть $\{B_n\}$ — последовательность линейных вполне непрерывных операторов, действующих из нормированного пространства Φ в банахово пространство Ψ . Если существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(\Phi \rightarrow \Psi)$, что $\|A - B_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, то оператор A вполне непрерывен.

Доказательство проводится в курсе функционального анализа. ■

Лемма 7.3.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$. Пусть ядро $L(x, y)$ определено на $\Omega \times \Omega$ и является фредгольмовым: $P^2 = \int_{\Omega \times \Omega} |L(x, y)|^2 dx dy < \infty$. Тогда интегральный оператор $(B\varphi)(x) = \int_{\Omega} L(x, y)\varphi(y)dy$ можно рассматривать как действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Этот оператор вполне непрерывен, его норма удовлетворяет неравенству $\|B\| \leq P$.

Доказательство аналогично случаю, когда $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Ср. с замечанием 4.1 и примером 4.4. Как и в случае замечания 4.1, ограничимся здесь лишь формулировкой леммы. ■

Доказательство утверждения 7.3.

Пусть ядро $\mathcal{K}$ имеет вид (7.1). Сохраним обозначения из утверждения 7.1. Зададим число $\delta > 0$ и положим $\mathcal{K}(x, y) = L(x, y) + N(x, y)$, где ядра L и N определены на $\Omega \times \Omega$ следующим образом:

$$L(x, y) = \begin{cases} \mathcal{K}(x, y), & \text{если } |x - y| \geq \delta, \\ 0, & \text{если } |x - y| < \delta; \end{cases}$$

$$N(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x - y| \geq \delta, \\ \mathcal{K}(x, y), & \text{если } |x - y| < \delta. \end{cases}$$

Обозначим через $A, B, \mathcal{J}$ интегральные операторы с ядрами $\mathcal{K}, L, N$ соответственно; $A = B + \mathcal{J}$.

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и докажем, что найдётся такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\|\mathcal{J}\| < \varepsilon$. Имеем неравенство

$$|(\mathcal{J}\varphi)(x)|^2 = \left| \int_{|x-y|<\delta} \frac{Q(x, y)}{|x-y|^\alpha} \cdot \varphi(y) dy \right|^2 \leq M^2 \cdot \left(\int_{|x-y|<\delta} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha} dy \right)^2,$$

где $\varphi \in L_2(\Omega)$. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для функции $\frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha/2}} \in L_2(\Omega)$ и функции $\frac{1}{|x-y|^{\alpha/2}} \in L_2(\Omega)$ перемен-

ной y при фиксированном x (см. доказательство утверждения 7.2); учтём при этом следующее свойство интеграла Лебега: если функция интегрируема на Ω , то она интегрируема на любом измеримом подмножестве множества Ω , например, на множестве $\{y \in \Omega \mid |x - y| < \delta\}$. По-

$$\begin{aligned} \text{этому} \quad \left(\int_{|x-y|<\delta} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha} dy \right)^2 &= \left(\int_{|x-y|<\delta} \frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha/2}} dy \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_{|x-y|<\delta} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy \right) \cdot \left(\int_{|x-y|<\delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Последний интеграл был вычислен в доказательстве утверждения 7.1:

$$\int_{|x-y|<\delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \frac{|\sigma| \cdot \delta^{l-\alpha}}{l-\alpha} = \gamma(\delta) = \text{const.}$$

Учтём, что $\int_{|x-y|<\delta} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy \leq \int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy$; тогда имеем оценку

$$|(\mathcal{J}\varphi)(x)|^2 \leq M^2 \cdot \gamma(\delta) \cdot \int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy. \text{ Проинтегрируем последнее}$$

$$\text{неравенство по } \Omega: \int_{\Omega} |(\mathcal{J}\varphi)(x)|^2 dx \leq M^2 \cdot \gamma(\delta) \cdot \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} dy \right) dx.$$

Для повторного интеграла в правой части полученного неравенства применим теорему Фубини и неравенство (7.4). Извлекая квадратный корень, получаем неравенство

$$\|\mathcal{J}\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{M \cdot |\sigma| \cdot (\delta \cdot \Delta)^{\frac{l-\alpha}{2}}}{l-\alpha} \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$$

для всех $\varphi \in L_2(\Omega)$. Поэтому оператор $\mathcal{J}$ ограничен, и

$$\|\mathcal{J}\| \leq \frac{M \cdot |\sigma| \cdot (\delta \Delta)^{\frac{l-\alpha}{2}}}{l-\alpha} < \varepsilon \quad (7.7)$$

при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon)$.

При фиксированном δ ядро $L(x, y)$ ограничено на $\Omega \times \Omega$. Тогда по свойству 7.1 и в силу **ограниченности** множества Ω имеем $\int_{\Omega \times \Omega} |L(x, y)|^2 dx dy < \infty$, т.е. оператор B фредгольмов.

Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел, сходящуюся к нулю. При каждом $n \in \mathbb{N}$ выберем $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n)$, удовлетворяющее неравенству (7.7). Полагая $\delta = \delta_n$, построим ядра $L_n(x, y)$ и $N_n(x, y)$, а следовательно, и интегральные операторы B_n и $\mathcal{J}_n$. При всех n имеем $\mathcal{K} = L_n + N_n$, $A = B_n + \mathcal{J}_n$, где оператор B_n фредгольмов, а $\|\mathcal{J}_n\| < \varepsilon_n$. По лемме 7.3 все операторы B_n вполне непрерывны. Поскольку $\|A - B_n\| = \|\mathcal{J}_n\| < \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, по лемме 7.2 оператор A вполне непрерывен (пространство $\Psi = L_2(\Omega)$ полное). ■

Для интегрального оператора A со слабой особенностью существует сопряжённый оператор A^* , определённый ядром $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)} = \frac{\overline{Q(x, y)}}{|x - y|^\alpha}$. В этом можно убедиться, повторяя рассуждения раздела 2.1, проведённые для случая $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Надо только для произвольных функций $\varphi, \psi \in L_2(\Omega)$ обосновать возможность изменения порядка интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \overline{\psi(x)} dx \right) \varphi(y) dy. \quad (7.8)$$

Чтобы применить теорему Фубини, докажем существование интеграла

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y) \varphi(y)| \cdot |\overline{\psi(x)}| dy \right) dx = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y) \varphi(y)| dy \right) \cdot |\overline{\psi(x)}| dx. \quad (7.9)$$

Как в доказательстве утверждения 7.2, использующем неравенство (7.5), получаем, что функция переменной x , заданная интегралом $\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y) \varphi(y)| dy$, принадлежит $L_2(\Omega)$. Функция $|\overline{\psi(x)}| \in L_2(\Omega)$. По свойству 7.4 существует конечный интеграл (7.9), и по теореме Фубини справедливо равенство (7.8).

Следствие 7.2.

Если оператор со слабой особенностью $A \neq 0$ и является самосопряжённым (т.е. в (7.1) $Q(x, y) = \overline{Q(y, x)} \neq 0$), то он имеет хотя бы одно характеристическое значение.

Доказательство вытекает из утверждения 7.3 и теоремы 4.3. ■

7.2. Оценка ядра произведения двух операторов со слабой особенностью. Ограниченность итерированных ядер, начиная с некоторого номера.

Пусть по-прежнему Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$. Пусть на множестве $\Omega \times \Omega$ заданы ядра со слабыми особенностями:

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{Q(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad |Q(x, y)| \leq M = \text{const}, \quad 0 \leq \alpha < l, \quad (7.10)$$

$$L(x, y) = \frac{U(x, y)}{|x - y|^\beta}, \quad |U(x, y)| \leq N = \text{const}, \quad 0 \leq \beta < l. \quad (7.11)$$

Ядра $\mathcal{K}$ и L определяют интегральные операторы $(A\varphi)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy$ и $(B\varphi)(x) = \int_{\Omega} L(x, y) \varphi(y) dy$. По утверждениям 7.2 и 7.3 операторы A и B действуют из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$,

ограничены и, более того, вполне непрерывны. Тогда определён оператор AB , действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, который также вполне непрерывен и имеет норму $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Оператор AB интегральный, определён ядром $V(x, y) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, t) L(t, y) dt$.

Действительно:

$$\begin{aligned} (AB\varphi)(x) &= (A(B\varphi))(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, t) \left(\int_{\Omega} L(t, y) \varphi(y) dy \right) dt = \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, t) L(t, y) dt \right) \varphi(y) dy. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Здесь в обосновании нуждается только последнее равенство. По утверждению 7.2, если $\varphi \in L_2(\Omega)$, то и функция $B\varphi \in L_2(\Omega)$. Как доказано в том же утверждении 7.2, функция $|\mathcal{K}(x, t)(B\varphi)(t)|$ интегрируема по t на Ω при почти всех $x \in \Omega$. Поскольку при почти всех x существует конечный интеграл $\int_{\Omega} \left| \mathcal{K}(x, t) \left(\int_{\Omega} L(t, y) \varphi(y) dy \right) \right| dt$, то по теореме Фубини при почти всех x справедливо равенство (7.12).

Представляет интерес оценка сверху для выражения $|V(x, y)|$ через $|x - y|^{-1}$ при $x \neq y$. Такая оценка должна зависеть от соотношения между $\alpha + \beta$ и размерностью l . Зная эту оценку, можно установить важные свойства итерированных ядер $\mathcal{K}_n$ ядра $\mathcal{K}$. Из свойств оператора A ясно, что при любом $n \in \mathbb{N}$ оператор A^n действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, вполне непрерывен и имеет норму $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Оператор A^n интегральный, определён ядром $\mathcal{K}_n(x, y)$. Ниже будет показано, что заведомо для всех номеров $n > \frac{l}{2(l - \alpha)}$ ядра $\mathcal{K}_n$ фредгольмовы

и удовлетворяют условию (7.3); заведомо для всех $n > \frac{l}{l - \alpha}$ ядра $\mathcal{K}_n$ ограничены (а потому и являются фредгольмовыми, т.к. Ω — множество конечной меры Лебега); для $n < \frac{l}{l - \alpha}$ ядра $\mathcal{K}_n$ могут иметь слабую особенность при $x = y$; если $n = \frac{l}{l - \alpha} \in \mathbb{N}$, то ядро $\mathcal{K}_n$ может иметь лишь логарифмическую особенность при $x = y$.

Рассмотрим заодно и ядра, имеющие логарифмическую особенность; т. е. наряду с (7.10) и (7.11) будем допускать ядра

$$\mathcal{K}(x, y) = Q(x, y) \cdot \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad |Q(x, y)| \leq M = \text{const}, \quad (7.13)$$

$$L(x, y) = U(x, y) \cdot \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad |U(x, y)| \leq N = \text{const}. \quad (7.14)$$

Поскольку $\ln \frac{1}{|x-y|} < \frac{1}{|x-y|^\alpha}$ при любом $\alpha > 0$, то по утверждению 7.1 ядра (7.13) и (7.14) фредгольмовы (ср. с примером 1.4). По лемме 7.3 определяемые ими интегральные операторы A и B вполне непрерывны как действующие из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 7.4.

Пусть ядра $\mathcal{K}$ и L определены формулами (7.10) и (7.11). При $x \neq y$ справедлива оценка

$$|V(x, y)| \leq \begin{cases} c_1, & \text{если } \alpha + \beta < l; \\ c_2 \ln \frac{1}{|x-y|} + c_3, & \text{если } \alpha + \beta = l; \\ \frac{c_4}{|x-y|^{\alpha+\beta-l}}, & \text{если } \alpha + \beta > l. \end{cases} \quad (7.15)$$

Здесь c_i — некоторые не зависящие от x и y положительные постоянные.

Доказательство.

Пусть фиксированы $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Нас интересует оценка ядра $V(x, y)$ при малых $|x-y|$. Чтобы установить такую оценку, проведём сначала некоторые рассуждения геометрического характера. Выберем в $\mathbb{R}^l$ новую декартову систему координат $z_1, \dots, z_l$: поместим начало координат в точку x и проведём ось z_1 через точку y так, чтобы направление от x к y было положительным. Тогда в новой системе координат $x = (0, \dots, 0)$, $y = (|x-y|, 0, \dots, 0)$. Пусть точка $t = (z_1, \dots, z_l)$ пробегает в $\mathbb{R}^l$ шар с центром в x радиуса Δ (Δ — диаметр области Ω); область Ω целиком принадлежит этому шару. Для удобства дальнейших оценок изменим масштаб по всем координатным осям z_j : положим $z_j = |x-y| \cdot w_j$, $j = 1, \dots, l$; этим введена система координат $w_1, \dots, w_l$. В этой системе координат точка t пробегает шар радиуса $\frac{\Delta}{|x-y|}$. Введём обозначение $r = \left(\sum_{j=1}^l w_j^2 \right)^{1/2}$.

Тогда $dt = dz_1 \dots dz_l = |x-y|^l \cdot dw_1 \dots dw_l$, $|x-t| = |x-y| \cdot r$,
 $|t-y| = |x-y| \cdot \left((w_1-1)^2 + \sum_{j=2}^l w_j^2 \right)^{1/2} = |x-y| \cdot (r^2 - 2w_1 + 1)^{1/2}$.

Поскольку $w_1 \leq r$, имеем $r^2 - 2w_1 + 1 \geq (r-1)^2$. Легко проверить, что при $r > 2$ справедливо неравенство $(r-1)^2 > \frac{r^2}{4}$. Дей-

ствительно: $(r-1)^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}(3r-2)(r-2) > 0$ при $r > 2$. Так как

$|x-y|$ мало, можно считать, что $\frac{\Delta}{|x-y|} > 2$. Шар, содержащий Ω , представим в виде объединения шара и шарового слоя:

$\{0 \leq r \leq \frac{\Delta}{|x-y|}\} = \{0 \leq r \leq 2\} \cup \{2 < r \leq \frac{\Delta}{|x-y|}\}$. Перейдём от системы координат $w_1, \dots, w_l$ к сферической системе координат в $\mathbb{R}^l$ с центром в точке x (см. утверждение 7.1). Тогда $dw_1 \dots dw_l = r^{l-1} dr d\sigma$. Теперь оценим ядро V .

$$|V(x, y)| = \left| \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, t) L(t, y) dt \right| \leq \leq MN \cdot \int_{\Omega} \frac{dt}{|x-t|^\alpha \cdot |t-y|^\beta} \leq MN \cdot \int_{|x-t| \leq \Delta} \frac{dt}{|x-t|^\alpha \cdot |t-y|^\beta}. \quad (7.16)$$

Переходя к указанной выше сферической системе координат, получим оценку интеграла в (7.16):

$$\int_{|x-t| \leq \Delta} \frac{dt}{|x-t|^\alpha \cdot |t-y|^\beta} \leq \leq \frac{|\sigma|}{|x-y|^{\alpha+\beta-l}} \cdot \left[\int_0^2 \frac{r^{l-1-\alpha} \cdot dr}{(r^2 - 2w_1 + 1)^{\beta/2}} + \int_2^{\frac{\Delta}{|x-y|}} \frac{r^{l-1-\alpha} \cdot dr}{\left(\frac{r^2}{4}\right)^{\beta/2}} \right].$$

Первый интеграл в квадратных скобках является некоторой постоянной $q > 0$, не зависящей от $|x-y|$. (q не зависит ни от x , ни от y , ни от выбора декартовой системы координат $w_1, \dots, w_l$, т.к. точка t пробегает сейчас шар радиуса 2 с центром в начале координат, и w_1 — её первая координата.) Вычис-

лим второй интеграл: $2^\beta \int_2^{\frac{\Delta}{|x-y|}} r^{l-1-\alpha-\beta} \cdot dr = 2^\beta \cdot I$. При $\alpha + \beta \neq l$ име-

ем $I = \frac{1}{l - \alpha - \beta} \cdot \left(\left(\frac{\Delta}{|x-y|} \right)^{l-\alpha-\beta} - 2^{l-\alpha-\beta} \right)$. При $\alpha + \beta = l$ имеем

$$I = \ln \frac{\Delta}{|x-y|} - \ln 2.$$

Если $\alpha + \beta < l$, то, учитывая $I < \frac{1}{l - \alpha - \beta} \cdot \left(\frac{\Delta}{|x-y|} \right)^{l-\alpha-\beta}$, получаем оценку

$$|V(x, y)| \leq MN \cdot |\sigma| \cdot \left[q \cdot |x-y|^{l-\alpha-\beta} + \frac{2^\beta \cdot \Delta^{l-\alpha-\beta}}{l - \alpha - \beta} \right] \leq \leq MN \cdot |\sigma| \cdot \left[q + \frac{2^\beta}{l - \alpha - \beta} \cdot \Delta^{l-\alpha-\beta} = c_1, \text{ т.к. } |x-y| = \Delta. \right]$$

Если $\alpha + \beta = l$, то получаем оценку

$$|V(x, y)| \leq MN \cdot |\sigma| \cdot \left[q + 2^\beta \cdot \ln \frac{\Delta}{2|x-y|} \right] = c_2 \ln \frac{1}{|x-y|} + c_3.$$

Если $\alpha + \beta > l$, то учтём, что $I < \int_2^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha+\beta+1-l}} = \frac{2^{l-\alpha-\beta}}{\alpha + \beta - l}$. Тогда получаем оценку $|V(x, y)| \leq MN \cdot |\sigma| \cdot \frac{1}{|x - y|^{\alpha+\beta-l}} \cdot \left[q + \frac{2^{l-\alpha}}{\alpha + \beta - l} \right] = \frac{c_4}{|x - y|^{\alpha+\beta-l}}$. ■

Задача 7.1.

Пусть в формулах (7.10) и (7.11) параметры $\alpha = \beta = 0$, т.е. ядра $\mathcal{K}$ и L ограничены. Найдите постоянную, мажорирующую выражение $|V(x, y)|$. ■

Задача 7.2.

Пусть в формуле (7.10) $0 < \alpha < l$, а в формуле (7.11) $\beta = 0$, т.е. ядро L ограничено. Докажите, что ядро $V(x, y)$ ограничено и найдите постоянную, мажорирующую выражение $|V(x, y)|$. ■

Задача 7.3.

Пусть ядро $\mathcal{K}$ задано формулой (7.10), а ядро L допускает оценку $|L(x, y)| \leq c_2 \ln \frac{1}{|x - y|} + c_3$, где c_2 и c_3 — положительные постоянные. Докажите, что ядро $V(x, y)$ ограничено.

Задача 7.4.

Пусть ядро $\mathcal{K}$ допускает оценку $|\mathcal{K}(x, y)| \leq c_2 \ln \frac{1}{|x - y|} + c_3$, а ядро L допускает оценку $|L(x, y)| \leq \tilde{c}_2 \ln \frac{1}{|x - y|} + \tilde{c}_3$. Докажите, что ядро $V(x, y)$ ограничено. ■

Утверждение 7.4.

Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ определено формулой (7.10). Тогда при $x \neq y$ справедлива оценка его итерированных ядер:

$$|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq \begin{cases} c_1^{(n)}, & \text{если } n\alpha - (n-1)l < 0, \\ & \text{т.е. } n > \frac{l}{l-\alpha}; \\ c_2^{(n)} \ln \frac{1}{|x-y|} + c_3^{(n)}, & \text{если } n\alpha - (n-1)l = 0, \\ & \text{т.е. } n = \frac{l}{l-\alpha} \in \mathbb{N}; \\ \frac{c_4^{(n)}}{|x-y|^{n\alpha-(n-1)l}}, & \text{если } n\alpha - (n-1)l > 0, \\ & \text{т.е. } n < \frac{l}{l-\alpha}. \end{cases} \quad (7.17)$$

Здесь $c_i^{(n)}$ — некоторые не зависящие от x и y положительные постоянные.

При $n\alpha - (n-1)l < \frac{l}{2}$, т.е. $n > \frac{l}{2(l-\alpha)}$, все ядра $\mathcal{K}_n$ фредгольмовы и удовлетворяют условию (7.3).

Доказательство.

Напомним, что $\mathcal{K}_{n+1}(x, y) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_1(x, t) \mathcal{K}_n(t, y) dt$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. утверждение 2.2).

Если в формуле (7.10) параметр $\alpha = 0$, т.е. ядро $\mathcal{K}$ ограничено, то и все ядра $\mathcal{K}_n$ ограничены: $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq M^n |\Omega|^{n-1}$, где $|\Omega|$ — „объём“ области Ω . Пусть далее $0 < \alpha < l$.

Рассмотрим случай такого значения α , что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\alpha \neq \frac{n-1}{n} \cdot l$, т.е. $n \neq \frac{l}{l-\alpha}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это условие означает также, что для всех n выполнено $\alpha \neq \frac{n}{n+1} \cdot l$, т.е. $n \neq \frac{\alpha}{l-\alpha}$ для всех n . Доказательство проведём индукцией по n , применяя лемму 7.4. При $n = 2$ в оценке (7.15) надо положить $\beta = \alpha$. Тогда (7.15) означает

$$|\mathcal{K}_2(x, y)| \leq \begin{cases} c_1^{(2)}, & \text{если } 2\alpha < l; \\ \frac{c_4^{(2)}}{|x-y|^{2\alpha-l}}, & \text{если } 2\alpha > l; \end{cases}$$

т.е. при $n = 2$ оценка (7.17) выполнена. Пусть оценка (7.17) выполнена для номера n . Докажем, что тогда она выполнена и для номера $n+1$. Если $n > \frac{l}{l-\alpha}$, то $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq c_1^{(n)}$, т.е. для ядра $\mathcal{K}_n$ параметр $\beta = 0$. Поэтому и для ядра $\mathcal{K}_{n+1}$ имеем оценку $|\mathcal{K}_{n+1}(x, y)| \leq c_1^{(n+1)}$ (см. задачу 7.2). Случай $n = \frac{l}{l-\alpha}$ сейчас исключён исходным пред-

положением $\alpha \neq \frac{n-1}{n} \cdot l$. Если $n < \frac{l}{l-\alpha}$, то оценка ядра $\mathcal{K}_n$ имеет слабую особенность, определяемую параметром $\beta = n\alpha - (n-1)l$. Сравним $\alpha + \beta$ с размерностью l . Если $\frac{\alpha}{l-\alpha} < n < \frac{l}{l-\alpha}$, то $\alpha + \beta = (n+1)\alpha - (n-1)l < l$ (проверьте!). Поэтому, согласно (7.15), для ядра $\mathcal{K}_{n+1}$ имеем оценку $|\mathcal{K}_{n+1}(x, y)| \leq c_1^{(n+1)}$. Если же $n < \frac{\alpha}{l-\alpha}$, то $\alpha + \beta > l$. Тогда, согласно (7.15), для ядра $\mathcal{K}_{n+1}$ имеем оценку $|\mathcal{K}_{n+1}(x, y)| \leq \frac{c_4^{(n+1)}}{|x-y|^{\alpha+\beta-l}}$, где $\alpha+\beta-l = (n+1)\alpha - ((n+1)-1)l$. Наконец, случай $n = \frac{\alpha}{l-\alpha} \in \mathbb{N}$ исключён исходным условием $\alpha \neq \frac{n}{n+1} \cdot l$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим случай такого значения α , что для некоторо-

го $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $\alpha = \frac{n_0}{n_0 + 1} \cdot l$, т.е. $n_0 = \frac{\alpha}{l - \alpha}$. В этом случае $n_0 + 1 = \frac{l}{l - \alpha}$. Поскольку $n_0 \geq 1$, то $\alpha \geq \frac{l}{2}$. Пусть, например, $\alpha = \frac{l}{2}$; тогда $n_0 = 1$. При $n = 2$ в оценке (7.15) надо положить $\beta = \alpha = \frac{l}{2}$, и тогда (7.15) означает $|\mathcal{K}_2(x, y)| = c_2^{(2)} \ln \frac{1}{|x - y|} + c_3^{(2)}$, т.к. $\alpha + \beta = l$. Ядро $\mathcal{K}_3$ в случае $\alpha = \frac{l}{2}$ будет уже ограниченным (см. задачу 7.3), а вместе с ним ограниченными будут и все ядра $\mathcal{K}_n$, $n \geq 3$ (см. задачу 7.2). В случае $\alpha = \frac{n_0}{n_0 + 1} \cdot l > \frac{l}{2}$ будем иметь $n_0 > 1$. Тогда при $1 \leq n \leq n_0$ выполнено неравенство $(n + 1)\alpha - ((n + 1) - 1)l \geq 0$ (проверьте!), из которого следует $n\alpha - (n - 1)l \geq l - \alpha > 0$. При $n = n_0 + 1 = \frac{l}{l - \alpha}$ выполнено равенство $n\alpha - (n - 1)l = 0$. А если $n > n_0 + 1$, то $n\alpha - (n - 1)l < 0$. Ядро $\mathcal{K}_1$, определённое формулой (7.10) с указанным значением α , имеет слабую особенность. По индукции доказывается, что для ядер $\mathcal{K}_n$ при $1 < n \leq n_0$ справедлива оценка $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq \frac{c_4^{(n)}}{|x - y|^{n\alpha - (n-1)l}}$. Для ядра $\mathcal{K}_{n_0+1}$ справедлива оценка $|\mathcal{K}_{n_0+1}(x, y)| \leq c_2^{(n_0+1)} \ln \frac{1}{|x - y|} + c_3^{(n_0+1)}$. При $n > n_0 + 1$ все ядра $\mathcal{K}_n$ ограничены.

Осталось заметить, что при любом $0 \leq \alpha < l$ для номеров $n > \frac{l}{2(l - \alpha)}$ выполнено неравенство $\gamma = n\alpha - (n - 1)l < \frac{l}{2}$ (проверьте!). Если при этом ядро $\mathcal{K}_n$ допускает оценку $|\mathcal{K}_n(x, y)| \leq \frac{c_4^{(n)}}{|x - y|^\gamma}$,

где $0 < \gamma < \frac{l}{2}$, то по утверждению 7.1 такое ядро фредгольмово и удовлетворяет условию (7.3); в этот случай включается и ядро с логарифмической особенностью. А если ядро $\mathcal{K}_n$ ограничено, то оно фредгольмово и удовлетворяет условию (7.3), т.к. $|\Omega| < \infty$. ■

7.3. Справедливость теорем Фредгольма для уравнений со слабой особенностью.

По-прежнему считаем, что Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$. Будем искать решения уравнений со слабой особенностью в $L_2(\Omega)$.

Докажем, что для уравнения (7.2) со слабой особенностью в ядре оператора A выполнены теоремы Фредгольма 2.1 — 2.4. Для этого сначала рассмотрим операторный многочлен от A специального вида.

Пусть $n \in \mathbb{N}$; введём обозначение $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$. Комплексное число ζ является корнем степени n из единицы. Оно обладает очевидным свойством: $\zeta^{-m} = \zeta^{n-m}$ при $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n-1$ (проверьте!). Многочлен $z^n - 1$ (z — комплексная переменная) имеет в поле $\mathbb{C}$ ровно n различных корней, которые представляют собой степени этого числа: $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$. Следовательно, справедливо разложение на множители: $z^n - 1 = (z - 1)(z - \zeta)(z - \zeta^2) \dots (z - \zeta^{n-1})$. Тогда

$$1 - z^n = (1 - \zeta \cdot z)(1 - \zeta^2 \cdot z) \dots (1 - \zeta^{n-1} \cdot z)(1 - z). \quad (7.18)$$

Действительно:

$$1 - z^n = (1 - z)(1 - \zeta^{-1} \cdot z)(1 - \zeta^{-2} \cdot z) \dots (1 - \zeta^{-n+1} \cdot z)(-1)^{n-1} \zeta^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\zeta^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{n-1}. \text{ Наряду с (7.18) используем очевидное тождество}$$

$$1 - z^n = (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})(1 - z). \quad (7.19)$$

Заменим в тождествах (7.18) и (7.19) единицу на единичный оператор E , а комплексную переменную z на оператор μA (параметр $\mu \in \mathbb{C}$). Тогда приходим к следующей лемме.

Лемма 7.5.

Пусть n — фиксированное натуральное число. Пусть A — линейный оператор, действующий из линейного пространства Φ в Φ , для которого определены все его степени A^m , $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда справедливы следующие операторные тождества:

$$\begin{aligned} E - \mu^n A^n &= (E + \mu A + \mu^2 A^2 + \dots + \mu^{n-1} A^{n-1})(E - \mu A) = \\ &= (E - \zeta \cdot \mu A)(E - \zeta^2 \cdot \mu A) \dots (E - \zeta^{n-1} \cdot \mu A)(E - \mu A). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Порядок сомножителей в (7.20) не имеет значения. ■

Замечание 7.3.

По утверждению 7.2 оператор A со слабой особенностью действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, поэтому определены его степени A^m , $m \in \mathbb{N}$. ■

Уравнение (7.2) со слабой особенностью имеет вид $(E - \mu A)\varphi = f$. Применим к обеим его частям оператор $B = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \dots + \mu^{n-1} A^{n-1}$. Тогда по лемме 7.5 получим уравнение

$$(E - \mu^n A^n)\varphi = Bf. \quad (7.21)$$

Если $f \in L_2(\Omega)$, то и $Bf \in L_2(\Omega)$. Оператор A^n интегральный, задан итерированным ядром $\mathcal{K}_n(x, y)$ оператора A . Выберем номер n из условия

$$n > \frac{l}{l - \alpha}, \quad (7.22)$$

Тогда по утверждению 7.4 ядро $\mathcal{K}_n$ ограничено, и оператор A^n фредгольмов, т.к. Ω — ограниченная область (согласно утверждению 7.4

достаточно выбрать $n > \frac{l}{2(l-\alpha)}$. В таком случае уравнение (7.21) фредгольмово, и для него выполнены теоремы 2.1 – 2.4 (см. замечание 2.28). Всякое решение уравнения (7.2) удовлетворяет уравнению (7.21). Однако, если функция φ удовлетворяет уравнению (7.21), то из этого ещё не следует, что φ будет решением уравнения (7.2). Докажем, что можно выбрать число n так, чтобы выполнялось (7.22), и чтобы уравнения (7.2) и (7.21) были равносильными. Для такого n всякое решение уравнения (7.21) будет удовлетворять уравнению (7.2). В доказательстве существенно используем теорему 2.1, которая справедлива для оператора A со слабой особенностью.

Теорема 7.1 (аналог теоремы 2.1).

В любой ограниченной области комплексной μ -плоскости содержится не более чем конечное множество характеристических чисел оператора A со слабой особенностью.

Доказательство.

Пусть в уравнении (7.2) свободный член $f = 0$:

$$(E - \mu A)\overset{\circ}{\varphi} = 0. \quad (7.23)$$

Пусть n выбрано из условия (7.22). Применяя к обеим частям уравнения (7.23) оператор B , получим однородное уравнение Фредгольма

$$(E - \mu^n A^n)\overset{\circ}{\varphi} = 0. \quad (7.24)$$

Если для оператора A число μ является характеристическим, и ему отвечает собственная функция $\overset{\circ}{\varphi}$, то функция $\overset{\circ}{\varphi}$ удовлетворяет и уравнению (7.24), т.е. число μ^n будет характеристическим для оператора A^n (ср. с утверждением 2.4).

В комплексной μ -плоскости рассмотрим круг $|\mu| \leq R$, где R — произвольное фиксированное число. По теореме 2.1 для фредгольмова оператора A^n в круге радиуса R^n с центром в нуле имеется лишь конечное число характеристических чисел оператора A^n . Тогда в круге $|\mu| \leq R$ оператор A имеет лишь конечное число характеристических чисел. ■

Теперь фиксируем произвольное значение $\mu \in \mathbb{C}$ и докажем, что число n , удовлетворяющее неравенству (7.22), можно выбрать так, что ни одно из чисел $\zeta \cdot \mu, \zeta^2 \cdot \mu, \dots, \zeta^{n-1} \cdot \mu$ не будет характеристическим значением оператора A . Предположим противное. Обозначим через

$p_1, p_2, \dots$ простые числа, большие, чем $\frac{l}{l-\alpha}$. Пусть $\zeta_j = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{p_j} \right\}$.

По предположению для любого номера j найдётся такое число $m_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq m_j < p_j$, что при данном μ число $\zeta_j^{m_j} \cdot \mu$ будет характеристическим для оператора A . Так как числа p_j простые, то среди чисел

$\zeta_j^{m_j} = \exp \left\{ \frac{2\pi i m_j}{p_j} \right\}$ нет равных. Указанных простых чисел p_j бесконечно много, поэтому на окружности радиуса $|\mu|$ с центром в нуле комплексной μ -плоскости окажется бесконечно много характеристических чисел $\zeta_j^{m_j} \cdot \mu$ оператора A . Это противоречит теореме 7.1. Поэтому существует такое простое число $p_j > \frac{l}{l - \alpha}$, что все соответствующие ему числа $\zeta_j \cdot \mu, \zeta_j^2 \cdot \mu, \dots, \zeta_j^{p_j-1} \cdot \mu$ суть правильные значения оператора A . Это простое число и выберем в качестве n .

Докажем, что при указанном выборе n уравнения (7.2) и (7.21) равносильны. Уравнение (7.21) согласно лемме 7.5 можно записать в следующем виде:

$$\prod_{m=1}^{n-1} (E - \zeta^m \cdot \mu A)(E - \mu A)\varphi = \prod_{m=1}^{n-1} (E - \zeta^m \cdot \mu A)f;$$

$$\prod_{m=1}^{n-1} (E - \zeta^m \cdot \mu A)[(E - \mu A)\varphi - f] = 0. \quad (7.21')$$

Введём обозначения $\omega = (E - \mu A)\varphi - f$ и $\omega_k = \prod_{m=k}^{n-1} (E - \zeta^m \cdot \mu A)\omega$ при $k = 2, \dots, n-1$. Уравнение (7.21') означает $(E - \zeta \cdot \mu A)\omega_2 = 0$. Так как $\zeta \cdot \mu$ — правильное значение оператора A , то $\omega_2 = 0$. Т.е. $(E - \zeta^2 \cdot \mu A)\omega_3 = 0$. Так как $\zeta^2 \cdot \mu$ — правильное значение оператора A , то $\omega_3 = 0$. И т.д.; $\omega_{n-1} = 0$ означает $(E - \zeta^{n-1} \cdot \mu A)\omega = 0$. Так как $\zeta^{n-1} \cdot \mu$ — правильное значение оператора A , то $\omega = 0$, т.е. $(E - \mu A)\varphi = f$. Итак, если функция φ удовлетворяет уравнению (7.21) при выбранном выше простом n , то она удовлетворяет уравнению (7.2).

Эквивалентность уравнений (7.2) и (7.21) при указанном n означает в частности, что в случае $f = 0$ при таком n будут эквивалентны уравнения (7.23) и (7.24). Поэтому (7.23) и (7.24) имеют одно и то же число линейно независимых решений.

Рассмотрим наряду с уравнениями (7.23) и (7.24) сопряжённые к ним уравнения:

$$(E - \bar{\mu}A^*)\overset{\circ}{\psi} = 0, \quad (7.25)$$

$$(E - \bar{\mu}^n(A^*)^n)\overset{\circ}{\psi} = 0. \quad (7.26)$$

Заменяя в предыдущих рассуждениях μ на $\bar{\mu}$ и A на A^* , приходим к эквивалентности уравнений (7.25) и (7.26). При этом сделанный выше выбор числа n может быть сохранён в (7.26). Действительно, оператор B не зависит от ζ , поэтому по лемме 7.5, применённой к A^*

и $\bar{\mu}$, имеем

$$\begin{aligned} E - \bar{\mu}^n (A^*)^n &= B^*(E - \bar{\mu}A^*) = \\ &= (E + \bar{\mu}A^* + \bar{\mu}^2(A^*)^2 + \dots + \bar{\mu}^{(n-1)}(A^*)^{n-1})(E - \bar{\mu}A^*) = \\ &= (E - \zeta \cdot \bar{\mu}A^*)(E - \zeta^2 \cdot \bar{\mu}A^*) \dots (E - \zeta^{n-1} \cdot \bar{\mu}A^*)(E - \bar{\mu}A^*). \end{aligned}$$

Если значение μ фиксировано, и ни одно из чисел $\zeta \cdot \mu, \zeta^2 \cdot \mu, \dots, \zeta^{n-1} \cdot \mu$ не является характеристическим для оператора A , то ни одно из чисел $(\zeta \cdot \mu)^n, (\zeta^2 \cdot \mu)^n, \dots, (\zeta^{n-1} \cdot \mu)^n$ не будет характеристическим для оператора A^n . Операторы A^n и $(A^*)^n$ фредгольмовы, их характеристические числа комплексно сопряжены (см. теорему 2.3). Поэтому ни одно из чисел $(\overline{\zeta \cdot \mu})^n, (\overline{\zeta^2 \cdot \mu})^n, \dots, (\overline{\zeta^{n-1} \cdot \mu})^n$ не будет характеристическим для оператора $(A^*)^n$. Тогда ни одно из чисел $\overline{\zeta \cdot \mu}, \overline{\zeta^2 \cdot \mu}, \dots, \overline{\zeta^{n-1} \cdot \mu}$ не будет характеристическим для A^* . Осталось заметить, что $\overline{\zeta^m} = \zeta^{n-m}$ при $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n-1$. Поэтому при фиксированном μ и при **прежнем** n ни одно из чисел $\zeta \cdot \bar{\mu}, \zeta^2 \cdot \bar{\mu}, \dots, \zeta^{n-1} \cdot \bar{\mu}$ не будет характеристическим для оператора A^* . Это и позволяет утверждать эквивалентность уравнений (7.25) и (7.26) при **том же** n .

Теорема 7.2 (аналог теоремы 2.3).

Если значение параметра μ характеристическое для оператора A со слабой особенностью, то сопряжённые однородные уравнения (7.23) и (7.25) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Доказательство.

Уравнения (7.23) и (7.24) имеют одно и то же число линейно независимых решений. Уравнения (7.25) и (7.26) имеют одно и то же число линейно независимых решений. А уравнения (7.24) и (7.26) фредгольмовы, для них справедлива теорема 2.3, по которой они имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений. ■

Замечание 7.4.

При выбранном выше числе n функция $\overset{\circ}{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (7.23) в том и только в том случае, если функция $B\overset{\circ}{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (7.23); функция $\overset{\circ}{\psi}$ удовлетворяет уравнению (7.25) в том и только в том случае, если функция $B^*\overset{\circ}{\psi}$ удовлетворяет уравнению (7.25).

Действительно, при выбранном n уравнения (7.23) и (7.24) эквивалентны, а операторы B и $(E - \mu A)$ перестановочны. Поэтому уравнение (7.24) можно записать в виде $(E - \mu^n A^n)\overset{\circ}{\varphi} = (E - \mu A)B\overset{\circ}{\varphi} = 0$. Точно так же при выбранном n уравнения (7.25) и (7.26) эквивалентны, а операторы B^* и $(E - \bar{\mu}A^*)$ перестановочны. Поэтому уравнение (7.26) можно записать в виде $(E - \bar{\mu}^n (A^*)^n)\overset{\circ}{\psi} = (E - \bar{\mu}A^*)B^*\overset{\circ}{\psi} = 0$. ■

Теорема 7.3 (аналог теоремы 2.4).

Чтобы неоднородное уравнение (7.2) со слабой особенностью имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(x)$ был

ортогонален к любому решению сопряжённого однородного уравнения

$$(7.25): (f, \overset{\circ}{\psi}) = \int_{\Omega} f(x) \overset{\circ}{\psi}(x) dx = 0.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть уравнение (7.2) разрешимо, и функция φ — какое-либо его решение. Пусть $\overset{\circ}{\psi}$ — какое-либо решение уравнения (7.25). Тогда $(f, \overset{\circ}{\psi}) = (\varphi - \mu A\varphi, \overset{\circ}{\psi}) = (\varphi, \overset{\circ}{\psi}) - \mu(\varphi, A^*\overset{\circ}{\psi}) = (\varphi, \overset{\circ}{\psi} - \bar{\mu}A^*\overset{\circ}{\psi}) = (\varphi, 0) = 0$.

Достаточность.

Выше было показано, что возможен такой выбор числа $n \in \mathbb{N}$, при котором уравнения (7.2) и (7.21) эквивалентны. Поэтому достаточные условия разрешимости для них совпадают. Уравнение (7.21) фредгольмово; по теореме 2.4 для его разрешимости достаточно выполнения условия $(Bf, \overset{\circ}{\psi}) = (f, B^*\overset{\circ}{\psi}) = 0$ при всех решениях $\overset{\circ}{\psi}$ уравнения (7.26). Уравнения (7.26) и (7.25) при выбранном n эквивалентны, поэтому всякое решение уравнения (7.26) будет и решением уравнения (7.25). Но при выбранном n множество всех решений $\overset{\circ}{\psi}$ уравнения (7.25) совпадает со множеством всех его решений $B^*\overset{\circ}{\psi}$ (см. замечание 7.4). ■

Теорема 7.4 (аналог теоремы 2.2).

Если значение параметра μ правильное для оператора A со слабой особенностью, то каждое из сопряжённых неоднородных уравнений

$$(E - \mu A)\varphi = f, \quad (7.2)$$

$$(E - \bar{\mu}A^*)\psi = g \quad (7.27)$$

имеет одно и только одно решение, каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащие $L_2(\Omega)$ (в том числе и $f = 0$, и $g = 0$).

Доказательство.

Пусть f и g — произвольные функции из $L_2(\Omega)$. Выше было показано, что возможен такой выбор числа $n \in \mathbb{N}$, при котором уравнения (7.23) и (7.24) эквивалентны. Поэтому при правильном значении μ оператора A число μ^n будет правильным значением оператора A^n для выбранного n . При этом же n уравнение (7.2) эквивалентно уравнению (7.21) а уравнение (7.27) эквивалентно уравнению

$$(E - \bar{\mu}^n(A^*)^n)\psi = B^*g \quad (7.28)$$

(проверьте!). Операторы A^n и $(A^*)^n$ фредгольмовы, функции Bf и B^*g принадлежат $L_2(\Omega)$. Уравнения (7.21) и (7.28) фредгольмовы, поэтому по теореме 2.2 при правильном значении μ^n оба они имеют одно и только одно решение. Следовательно, и каждое из уравнений (7.2) и (7.27) имеет одно и только одно решение. ■

7.4. Ядро, непрерывное в целом. Непрерывность решений интегрального уравнения со слабой особенностью.

Напомним, что Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$. При каких условиях решение уравнения (7.2) со слабой особенностью будет не только функцией из $L_2(\Omega)$, но даже непрерывной в Ω функцией?

Сначала рассмотрим вопрос об ограниченности решений уравнения 2-го рода с фредгольмовым ядром. Если функция $f(x)$ измерима и ограничена на Ω , то по свойству 7.1 интеграла Лебега эта функция $f \in L_2(\Omega)$. Поэтому для уравнения

$$\varphi(x) = \mu \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in \Omega, \quad (7.29)$$

с фредгольмовым ядром $\mathcal{K}$ имеет смысл вопрос о существовании его решений в пространстве $L_2(\Omega)$. Если такие решения существуют, то будут ли они ограничены на Ω ?

Замечание 7.5.

Функция, принадлежащая $L_2(\Omega)$, может быть как ограниченной, так и неограниченной (приведите примеры!).

Напомним, что эквивалентные на Ω функции относятся к одному элементу пространства $L_2(\Omega)$. Строго говоря, ограниченность элемента φ пространства $L_2(\Omega)$ понимается как неравенство $|\varphi(x)| \leq \text{const}$, выполненное почти всюду на Ω . Ниже это не будет подчёркиваться, т.е. указанное неравенство будем считать выполненным всюду на Ω . ■

Утверждение 7.5.

Пусть при данном $\mu \in \mathbb{C}$ уравнение (7.29) с фредгольмовым ядром $\mathcal{K}$ имеет решения в $L_2(\Omega)$. Пусть ядро $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy < \infty. \quad (7.3)$$

Пусть функция $f(x)$ измерима и ограничена на Ω . Тогда любое решение φ уравнения (7.29), принадлежащее $L_2(\Omega)$, будет ограничено на Ω .

Доказательство.

Пусть $|f(x)| \leq c_1 = \text{const}$ для всех $x \in \Omega$. Пусть функция $\varphi \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (7.29). По неравенству Коши–Буняковского для функций, зависящих от y (при фиксированном $x \in \Omega$), имеем

$$\left| \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\varphi(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} = c_2 = \text{const}. \text{ Тогда при всех } x \in \Omega$$

получаем $|\varphi(x)| \leq c_1 + |\mu| \cdot c_2 = \text{const}$. ■

Замечание 7.6.

Условию (7.3) удовлетворяет, например, ядро со слабой особенностью, если $0 < \alpha < \frac{l}{2}$ (см. утверждение 7.1).

По теореме Фубини условию (7.3) удовлетворяет также фредгольмово ядро, ограниченное на $\Omega \times \Omega$. ■

Следствие 7.3.

Если фредгольмово ядро удовлетворяет условию (7.3), то все его собственные функции ограничены.

Доказательство следует из утверждения 7.5 при $f = 0$. ■

Определение 7.1.

Ядро $K(x, y)$ называют непрерывным по переменной x в области Ω в целом, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, справедливо неравенство $\int_{\Omega} |K(x_1, y) - K(x_2, y)| dy < \varepsilon$. ■

Задача 7.5.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^1$, и ядро $K(x, y)$ непрерывно в замкнутом квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$. Докажите, что $K(x, y)$ непрерывно по переменной $x \in [a, b]$ в целом. (Именно этот факт был использован в примере 4.7, где доказано, что оператор $\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$ вполне непрерывен в пространстве $C[a, b]$.) ■

Задача 7.6.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^1$, и ядро $K(x, y)$ непрерывно в замкнутом треугольнике $T = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, а при $y > x$ равно нулю. Докажите, что $K(x, y)$ непрерывно по переменной $x \in [a, b]$ в целом. (Именно этот факт был использован в утверждении 3.1, а также в задаче 4.5, в которой доказано, что оператор $\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy$ вполне непрерывен в пространстве $C[a, b]$.) ■

Утверждение 7.6.

Пусть ядро $K(x, y)$ непрерывно по переменной x в области Ω в целом. Пусть функция $\varphi(y)$ ограничена на Ω . Тогда функция $\int_{\Omega} K(x, y)\varphi(y)dy$ равномерно непрерывна по переменной x на Ω .

Доказательство.

Пусть для всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство $|\varphi(y)| \leq c = \text{const}$. Для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдём такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любых $x_1, x_2 \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, будет выполнено неравенство $\int_{\Omega} |K(x_1, y) - K(x_2, y)| dy < \frac{\varepsilon}{c}$. Тогда

$$\left| \int_{\Omega} K(x_1, y)\varphi(y)dy - \int_{\Omega} K(x_2, y)\varphi(y)dy \right| \leq c \int_{\Omega} |K(x_1, y) - K(x_2, y)| dy < \varepsilon. \blacksquare$$

Следствие 7.4.

Пусть фредгольмово ядро $\mathcal{K}(x, y)$ удовлетворяет условию (7.3) и непрерывно в целом по переменной x в области Ω . Пусть свободный член $f(x)$ уравнения (7.29) непрерывен на Ω . Тогда любое решение уравнения (7.29) непрерывно на Ω . (Ср. с замечанием 2.10.)

Доказательство.

Функция f , непрерывная на замкнутой ограниченной области Ω , ограничена на Ω . По утверждению 7.5 любое решение φ уравнения (7.29), принадлежащее $L_2(\Omega)$, ограничено на Ω . Тогда правая часть равенства (7.29) есть функция, непрерывная по x на Ω . ■

Следствие 7.5.

Пусть в условиях следствия 7.4 функция $f = 0$. Тогда все собственные функции ядра $\mathcal{K}$ непрерывны на Ω . ■

Вернёмся к уравнению (7.2) вида $(E - \mu A)\varphi = f$ со слабой особенностью ядра (7.1). Как и в разделе 7.3, наряду с уравнением (7.2) рассмотрим уравнение (7.21) вида $(E - \mu^n A^n)\varphi = Bf$, где оператор $B = E + \mu A + \mu^2 A^2 + \dots + \mu^{n-1} A^{n-1}$.

Лемма 7.6.

Если функция f ограничена на Ω , то и функция Bf ограничена на Ω .

Доказательство.

Пусть для всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство $|f(x)| \leq c = \text{const}$. Пусть $|Q(x, y)| \leq M = \text{const}$ всюду на $\Omega \times \Omega$. Докажем, что функция $(Af)(x)$ ограничена. Действительно:

$$|(Af)(x)| = \left| \int_{\Omega} \frac{Q(x, y)}{|x - y|^{\alpha}} \cdot f(y) dy \right| \leq Mc \int_{\Omega} \frac{dy}{|x - y|^{\alpha}}.$$

Применяя оценку последнего интеграла, доказанную в утверждении 7.1, получаем $|(Af)(x)| \leq \frac{Mc|\sigma|\Delta^{l-\alpha}}{l-\alpha} = \text{const}$.

Из ограниченности функции Af следует точно таким же образом ограниченность функции $A^2 f$; и т.д. Тогда конечная сумма Bf ограниченных функций тоже ограничена. ■

Утверждение 7.7.

Если функция $Q(x, y)$ непрерывна на $\Omega \times \Omega$, то ядро (7.1) со слабой особенностью непрерывно по переменной x в целом на Ω .

Доказательство.

Пусть $|Q(x, y)| \leq M = \text{const}$ на $\Omega \times \Omega$. Обозначим через $|\Omega|$ меру („объём“) области Ω : $|\Omega| = \int_{\Omega} dy$. Выберем произвольное число

$\varepsilon > 0$. Докажем, что найдётся такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, будет выпол-

нено неравенство

$$\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy < \varepsilon. \quad (7.30)$$

Фиксируем достаточно малое число $\rho > 0$ и обозначим через $\omega_\rho(x_1)$ шар в $\mathbb{R}^l$ радиуса ρ с центром в точке x_1 : $\omega_\rho(x_1) = \{y \in \mathbb{R}^l \mid |y - x_1| < \rho\}$. Будем считать, что $|x_1 - x_2| < \rho$, т.е. $x_2 \in \omega_\rho(x_1)$. Число ρ выберем ниже по заданному ε и независимо от x_1 . Сейчас же полагаем ρ настолько малым, что $\Omega \setminus \omega_\rho(x_1) \neq \emptyset$. Представим область Ω в виде объединения непересекающихся множеств: $\Omega = I \cup D$, где $I = \Omega \cap \omega_\rho(x_1)$, $D = \Omega \setminus \omega_\rho(x_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy &= \int_I |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy + \\ &+ \int_D |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Оценим первое слагаемое в (7.31):

$$\begin{aligned} \int_I |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy &\leq \int_I |\mathcal{K}(x_1, y)| dy + \int_I |\mathcal{K}(x_2, y)| dy = \\ &= \int_I \frac{|Q(x_1, y)|}{|x_1 - y|^\alpha} dy + \int_I \frac{|Q(x_2, y)|}{|x_2 - y|^\alpha} dy \leq M \cdot \left(\int_{\omega_\rho(x_1)} \frac{dy}{|x_1 - y|^\alpha} + \int_{\omega_\rho(x_1)} \frac{dy}{|x_2 - y|^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Для оценки интеграла $\int_{\omega_\rho(x_1)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha}$ введём в $\mathbb{R}^l$ сферическую систему координат с центром в точке x_1 и обозначим $\sigma = \{y \in \mathbb{R}^l \mid |y - x_1| = 1\}$. Тогда $dy = r^{l-1} dr d\sigma$ (см. утверждение 7.1), и $\int_{\omega_\rho(x_1)} \frac{dy}{|x_1 - y|^\alpha} = |\sigma| \cdot \int_0^\rho r^{l-1-\alpha} dr = \frac{|\sigma| \cdot \rho^{l-\alpha}}{l-\alpha}$.

Поскольку $x_2 \in \omega_\rho(x_1)$, то для всех $y \in \omega_\rho(x_1)$ выполнено неравенство $|x_2 - y| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - y| < 2\rho$, т.е. шар $\omega_\rho(x_1)$ принадлежит шару $\omega_{2\rho}(x_2) = \{y \in \mathbb{R}^l \mid |y - x| < 2\rho\}$ с центром в x_2 . Тогда имеем

$$\text{оценку } \int_{\omega_\rho(x_1)} \frac{dy}{|x_2 - y|^\alpha} \leq \int_{\omega_{2\rho}(x_2)} \frac{dy}{|x_2 - y|^\alpha} = \frac{|\sigma| \cdot (2\rho)^{l-\alpha}}{l-\alpha}.$$

Теперь ясно, что выбрав $\rho(\varepsilon)$ из условия $\frac{|\sigma|}{l-\alpha} \cdot (1 + 2^{l-\alpha}) \cdot \rho^{l-\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$, получим неравенство $\int_I |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy < \frac{\varepsilon}{3}$.

Оценим второе слагаемое в (7.31). Для этого учтём, что

$$|\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| = \left| \frac{Q(x_1, y)}{|x_1 - y|^\alpha} - \frac{Q(x_2, y)}{|x_1 - y|^\alpha} + \frac{Q(x_2, y)}{|x_1 - y|^\alpha} - \frac{Q(x_2, y)}{|x_2 - y|^\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|Q(x_1, y) - Q(x_2, y)|}{|x_1 - y|^\alpha} + |Q(x_2, y)| \cdot \frac{||x_1 - y|^\alpha - |x_2 - y|^\alpha|}{|x_1 - y|^\alpha \cdot |x_2 - y|^\alpha}.$$

Для всех $y \in D$ выполнено неравенство $|x_1 - y| \geqslant \rho > 0$. Напомним, что точки x_1 и x_2 выбираются из условия $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$. Подчиним выбор числа $\delta(\varepsilon)$ условию $\delta < \frac{\rho}{2}$. Тогда для всех $y \in D$ будет выполнено неравенство $|x_2 - y| > \frac{\rho}{2}$, т.к. шар $\{y \in \mathbb{R}^l \mid |y - x_2| \leqslant \frac{\rho}{2}\}$ содержится в $\omega_\rho(x_1)$. При указанном выборе числа δ и при всех $y \in D$ справедливы неравенства $|x_1 - y|^{-\alpha} \leqslant \rho^{-\alpha}$ и $(|x_1 - y| \cdot |x_2 - y|)^{-\alpha} < \frac{2^\alpha}{\rho^{2\alpha}}$.

Функции $Q(x, y)$ и $|x - y|^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < l$, равномерно непрерывны на $\Omega \times \Omega$. Для выбранного числа ε можно указать такое число $\delta_1(\varepsilon)$, что при $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и при всех $y \in D$ будет выполнено неравенство $|Q(x_1, y) - Q(x_2, y)| < \frac{\rho^\alpha \cdot \varepsilon}{3 \cdot |\Omega|}$. Для выбранного числа ε можно указать такое число $\delta_2(\varepsilon)$, что при $|x_1 - x_2| < \delta_2$ и при всех $y \in D$ будет выполнено неравенство $||x_1 - y|^\alpha - |x_2 - y|^\alpha| < \frac{\rho^{2\alpha} \cdot \varepsilon}{2^\alpha \cdot 3M \cdot |\Omega|}$. Тогда при $\delta < \min\{\frac{\rho(\varepsilon)}{2}, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ для всех $x_1, x_2 \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, будет выполнено неравенство (7.30). ■

Следствие 7.6.

Пусть в ядре (7.1) со слабой особенностью функция $Q(x, y)$ непрерывна на $\Omega \times \Omega$. Пусть функция φ ограничена на Ω . Тогда функция $(A\varphi)(x) = \int_\Omega \frac{Q(x, y)}{|x - y|^\alpha} \cdot \varphi(y) dy$ непрерывна на Ω . ■

Следствие 7.7.

Пусть в ядре (7.1) со слабой особенностью функция $Q(x, y)$ непрерывна на $\Omega \times \Omega$. Тогда интегральный оператор A с ядром (7.1) можно рассматривать как действующий из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Этот оператор ограничен, и для его нормы справедлива оценка $\|A\| \leqslant \frac{M \cdot |\sigma| \cdot \Delta^{l-\alpha}}{l - \alpha}$, где $M = \max_{\Omega \times \Omega} |Q(x, y)|$, а $|\sigma|$ и Δ определены в утверждении 7.1. (Ср. со следствием 7.1.)

Доказательство.

$|(A\varphi)(x)| \leqslant \int_\Omega \frac{|Q(x, y)|}{|x - y|^\alpha} \cdot |\varphi(y)| dy \leqslant \frac{M \cdot |\sigma| \cdot \Delta^{l-\alpha}}{l - \alpha} \cdot \|\varphi\|_{C(\Omega)}$ при всех $x \in \Omega$. ■

Утверждение 7.8.

Пусть в уравнении (7.2) со слабой особенностью свободный член f ограничен. Тогда любое решение этого уравнения ограничено.

Доказательство.

В разделе 7.3 показано, что можно выбрать число $n \in \mathbb{N}$, для которого уравнения (7.2) и (7.21) эквивалентны. При этом в уравнении (7.21) ядро $K_n(x, y)$ оператора A^n будет ограниченным. Если функция f ограничена, то по лемме 7.6 и свободный член Bf уравнения (7.21) ограничен. Тогда по утверждению 7.5 любое решение уравнения (7.21), а вместе с ним и уравнения (7.2), ограничено. ■

Теорема 7.5.

Пусть в ядре (7.1) функция $Q(x, y)$ непрерывна на $\Omega \times \Omega$. Пусть в уравнении (7.2) с таким ядром свободный член f непрерывен на Ω . Тогда любое решение уравнения (7.2) непрерывно на Ω .

Доказательство.

Функция f , непрерывная на замкнутой ограниченной области Ω , ограничена на Ω . Тогда по утверждению 7.8 любое решение φ уравнения (7.2) ограничено. По следствию 7.6 функция $(A\varphi)(x)$ непрерывна на Ω . Поэтому и функция $\varphi(x) = \mu \cdot (A\varphi)(x) + f(x)$ непрерывна на Ω . ■

Следствие 7.8.

Пусть в ядре (7.1) функция $Q(x, y)$ непрерывна на $\Omega \times \Omega$. Тогда все собственные функции такого ядра непрерывны на Ω . ■

Глава 8.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, их сведение к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода со слабыми особенностями.

Решения краевых (и начально–краевых) задач для дифференциальных уравнений с частными производными можно получить методом граничных интегральных уравнений. Для этого искомое решение представляют в виде некоторого интеграла по границе области, в которой поставлена задача; такой интеграл содержит имеющую определённый физический смысл неизвестную функцию. Для нахождения этой неизвестной функции используют краевые условия. Если подставить в краевые условия выбранное интегральное представление решения, то получится интегральное уравнение. Решив его, найдём и решение исходной краевой задачи в интегральной форме.

В данной главе рассмотрим метод граничных интегральных уравнений на примере задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Эти задачи подробно изучаются в курсе „Уравнения математической физики“. Напомним их постановки и сформулируем без доказательств основные их свойства. Покажем, что эти задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода со слабыми особенностями. Теория Фредгольма устанавливает основные свойства задач Дирихле и Неймана и даёт полное исследование их корректности. Решения этих задач можно построить с помощью интегралов, которые называют потенциалом двойного слоя и потенциалом простого слоя.

8.1. Уравнение Лапласа. Постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана в пространстве и на плоскости.

В данной главе будем использовать следующие обозначения: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^l$, $l = 2$ или $l = 3$; через $|\vec{x} - \vec{y}|$ обозначим евклидово расстояние между точками $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в $\mathbb{R}^l$. Будем опускать стрелочки в обозначениях векторов из $\mathbb{R}^l$; так что далее полагаем $x, y \in \mathbb{R}^l$. Через D^+ обозначим **ограниченную** односвязную область в $\mathbb{R}^l$ с границей Σ , $\bar{D}^+ = D^+ \cup \Sigma$, $D^- = \mathbb{R}^l \setminus \bar{D}^+$, $\bar{D}^- = D^- \cup \Sigma$; $\mathbb{R}^l = D^+ \cup \Sigma \cup D^-$. Простую замкнутую кривую $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ или простую двустороннюю поверхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ считаем гладкой, так что всюду на Σ определено непрерывное поле нормалей $\vec{n}$ к Σ . Через n_x^+ обозначаем вектор единичной нормали в точке $x \in \Sigma$, внешней по отношению к области D^+ (направлен внутрь области D^-), а через n_x^- — вектор единичной нормали, внешней по отношению к D^- (направлен внутрь области D^+); $|n_x^+| = |n_x^-| = 1$.

8.1.1. Математические модели некоторых стационарных физических процессов. Краевые условия на поверхностях и кривых Ляпунова*.

Дифференциальный оператор $\Delta u(x) \equiv \operatorname{divgrad} u(x)$ называют оператором Лапласа; $\Delta u(x) = 0$ — уравнение Лапласа. Дважды непрерывно дифференцируемую в области $D \subset \mathbb{R}^l$ действительную функцию $u(x)$, удовлетворяющую в D уравнению Лапласа, называют гармонической в этой области функцией.

К уравнению Лапласа приводит описание многих стационарных физических процессов и явлений. Например, уравнению Лапласа удовлетворяет не зависящая от времени температура в однородном теле или в однородной пластине в отсутствие источников теплоты. Уравнение Лапласа выражает отсутствие источников в рассматриваемой области. Если же такие источники имеются, то вместо уравнения Лапласа получим уравнение Пуассона** $\Delta u(x) = -F(x)$.

Пример 8.1.

Если в момент времени $t = 0$ однородная плоская круглая пластина ($D^+ = \{0 \leq r < r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, r, φ — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$) имела температуру $u(r, \varphi, t = 0) = u_0 \cdot r \cdot \sin \varphi$, $u_0 = \text{const}$, а во все моменты времени $t \geq 0$ на её границе поддерживается температура $u(r_0, \varphi, t) = u_0 \cdot r_0 \cdot \sin \varphi$, то функция $u_0 \cdot r \cdot \sin \varphi$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 \Delta u = 0$ (проверьте!), т.е. является стационарным распределением температуры в пластине. ■

Пример 8.2.

Стационарную температуру $u(r, \varphi, t) = \frac{u_0}{3} r^2 \sin \varphi$, $u_0 = \text{const}$, однородной круглой пластины $\{0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ можно получить заданием на её границе во все моменты времени температуры $u(r_0, \varphi, t) = \frac{u_0}{3} r_0^2 \sin \varphi$ и действием источников (или поглотителей) теплоты в пластине с плотностью их распределения $F(r, \varphi, t) = -ku_0 \sin \varphi$ во все моменты времени t , где k — коэффициент теплопроводности. (Проверьте, что $\Delta u = -\frac{F}{k}$.) ■

Пример 8.3.

Стационарная температура $u(r, \varphi, \theta, t) = u_0 \cdot r$, $u_0 = \text{const}$, однородного шара ($D^+ = \{0 \leq r < r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, r, φ, θ — сферические координаты в $\mathbb{R}^3$) может быть получена заданием на его границе во все моменты времени t температуры $u(r_0, \varphi, \theta, t) = u_0 \cdot r_0$ и действием источников (или поглотителей) теплоты, имеющих постоянное по времени центрально-симметричное распределение в шаре: $F(r, \varphi, \theta, t) \equiv F(r) = -\frac{2u_0 k}{r}$, где k — коэффициент теплопроводности.

* Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) — русский математик.

** Пуассон Симеон Дени (1781–1840) — французский математик.

сти. В этом случае температура в шаре не зависит от углов φ и θ , и тогда $\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$. Функция $u_0 \cdot r$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 \Delta u - \frac{2a^2 u_0}{r} = 0$ (проверьте!), т.е. уравнению $\Delta u = \frac{2u_0}{r} = -\frac{F(r)}{k}$.

Заметьте, что в сферических координатах элемент объема равен $r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$. Поэтому $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_0} F(r) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = -4\pi u_0 k r_0^2$. ■

Замечание 8.1.

В примерах 8.1 — 8.3 неявно предполагалось, что температура u является функцией, непрерывной в замкнутой области $\bar{D}^+$. Уравнение теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u + F$ справедливо только в открытой области D^+ . ■

К уравнению Лапласа приводит также описание безвихревого в области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$ течения несжимаемой жидкости, когда в D^+ нет источников жидкости или стоков. Если $v(x)$ — векторное поле скоростей в области D^+ , то отсутствие вихрей означает, что в D^+ можно ввести такую скалярную функцию $u(x)$, что $v(x) = -\text{grad} u(x)$. Течение при этом называют потенциальным, а $u(x)$ — потенциалом скорости. Тогда $u(x)$ в области D^+ удовлетворяет уравнению $\text{div grad} u(x) = 0$. Очевидно, что потенциал скорости может удовлетворять уравнению Лапласа только в том случае, если масса втекающей в D^+ жидкости (в единицу времени) равна массе вытекающей из D^+ через границу Σ .

В задачах электростатики векторное поле $E(x)$ (E — напряжённость электрического поля в точке x) является потенциальным, т.е. его можно охарактеризовать скалярной функцией $u(x)$ — электростатическим потенциалом, связанным с E соотношением $E(x) = -\text{grad} u(x)$. Из уравнений Максвелла* вытекает, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению $\text{div grad} u(x) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \rho(x)$, где $\rho(x)$ — объёмная плотность распределения электрических зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость. Если в рассматриваемой области пространства нет электрических зарядов, т.е. $\rho(x) \equiv 0$, то функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Для однозначного определения искомой гармонической функции требуются дополнительные условия. Условия на границе Σ называют краевыми или граничными. Краевое условие 1-го рода $u|_{x \in \Sigma} = f(x)$ называют условием Дирихле, условие 2-го рода $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x \in \Sigma} = g(x)$ — условием Неймана (функции f и g заданы всюду на Σ). Если решение краевой задачи для уравнения Лапласа ищется в ограниченной обла-

* Максвелл Джеймс Клерк (1831–1879) — английский физик.

сти D^+ , то задачу называют внутренней, если же — вне ограниченной области, т.е. в D^- , то — внешней краевой задачей.

Решения всех краевых задач будем подразумевать **классическими**. Это накладывает определённые требования на постановку задачи; в частности, нужны некоторые предположения о границе Σ . Будем далее предполагать, что поверхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ является поверхностью Ляпунова (или кривая $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ является кривой Ляпунова).

Определение 8.1.

Поверхность Σ называют поверхностью Ляпунова, если она удовлетворяет следующим требованиям.

1°. Поверхность Σ гладкая: в каждой точке $x \in \Sigma$ существует касательная плоскость, а следовательно, и нормаль n_x^+ ; $|n_x^+| = 1$.

2°. Существует число $r > 0$ (одно и то же для всех точек $x \in \Sigma$) такое, что:

- для любой точки $x \in \Sigma$ часть Σ_x поверхности Σ , лежащая в открытом шаре радиуса r с центром в x , является связным множеством;
- каждая прямая, параллельная нормали n_x^+ , пересекает Σ_x не более чем в одной точке.

3°. Поле нормалей n_x^+ как функция точки $x \in \Sigma$ удовлетворяет условию Гёльдера, т.е. существуют такие числа $C > 0$ и $0 < \delta \leq 1$ (одни и те же для любых двух точек $x, y \in \Sigma$), что $|n_x^+ - n_y^+| \leq C \cdot |x - y|^\delta$.

4°. Телесный угол, под которым из любой точки пространства видна любая часть (связная или несвязная — безразлично) поверхности Σ , равномерно ограничен. ■

Аналогично формулируется определение кривой Ляпунова на плоскости, но теперь требование 2° вытекает из требований 1° и 3°, а требование 4° формулируется для плоского угла.

8.1.2. Внутренние задачи Дирихле и Неймана.

Внутренняя задача Дирихле имеет вид

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^+; \quad u|_{x \in \Sigma} = f(x).$$

Её классическим решением называют функцию $u(x)$, которая определена и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}^+$, удовлетворяет уравнению Лапласа в открытой области D^+ , принимает на границе заданные значения. Условие непрерывности функции u в замкнутой области необходимо для единственности решения задачи. Если это условие отбросить,

то любую функцию вида $u(x) = \begin{cases} \text{const}, & x \in D^+, \\ f(x), & x \in \Sigma, \end{cases}$ можно было бы

считать решением задачи. Классическое решение $u \in C(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+)$, а определяющая его функция $f \in C(\Sigma)$.

Внутренняя задача Неймана имеет вид

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^+; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_x} \right|_{x \in \Sigma} = g(x).$$

Её классическим решением называют функцию $u(x)$, которая определена, непрерывна и имеет непрерывные первые производные в замкнутой области $\bar{D}^+$, удовлетворяет уравнению Лапласа в открытой области D^+ , а её нормальная производная принимает на границе заданные значения. Классическое решение $u \in C^1(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+)$, а задающая краевое условие функция $g \in C(\Sigma)$.

Очевидно, что если $u(x)$ — решение внутренней задачи Неймана, то $u(x) + \text{const}$ также является решением той же задачи.

Из первой формулы Грина вытекает, что если функция $u(x)$ гармоническая в ограниченной области D^+ , границей которой является поверхность Ляпунова Σ (или кривая Ляпунова, если $D^+ \subset \mathbb{R}^2$), то $\int_{\Sigma} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\Sigma = 0$. Поэтому решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа может существовать только если $\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma = 0$.

8.1.3. Единственность классических решений внутренних краевых задач для уравнения Лапласа.

Утверждение 8.1.

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа не может иметь более одного классического решения.

Доказательство основано на принципе максимума гармонической функции. ■

Решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа не может быть единственным, поскольку в условие этой задачи входят только производные искомой функции. Но имеет место единственность решения с точностью до постоянного слагаемого.

Утверждение 8.2.

Классическое решение внутренней задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной: если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения одной и той же задачи Неймана, то $u_1(x) - u_2(x) \equiv \text{const}$.

Доказательство основано на первой формуле Грина. ■

8.1.4. Фундаментальные решения уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости. Регулярные на бесконечности гармонические функции в пространстве и на плоскости.

Внешние задачи для уравнения Лапласа ставятся по-разному в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Это связано с различием в поведении на бесконечности фундаментальных решений уравнения Лапласа в трёхмерном и двумерном случаях.

Пусть y — фиксированная точка в $\mathbb{R}^3$. Найдём решение уравнения Лапласа $u(x)$, зависящее только от $|x - y|$. Введём сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в точке y . Такое решение будет обладать сферической симметрией, т.е. $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Следовательно, будет выполняться уравнение $\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$, где $r = |x - y|$. Решение $u(x; y) = \frac{1}{|x - y|}$ называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Это гармоническая по x функция, определённая всюду в $\mathbb{R}^3$, кроме точки $x = y$.

В двумерном случае введём полярную систему координат (r, φ) с центром в точке y . Найдём решение уравнения Лапласа $u(x)$, зависящее только от $|x - y|$. В этом случае $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, и выполняется уравнение $\Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$. Его общее решение имеет вид $u(r) = C_1 \ln \frac{1}{r} + C_2$, где $r = |x - y|$. Функцию $u(x; y) = \ln \frac{1}{|x - y|}$ называют фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.

Для однозначного нахождения классического решения внешней краевой задачи нужно потребовать определённого поведения искомой функции на бесконечности. Это требование называют условием регулярности. Говорят, что функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, регулярна на бесконечности, если $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ и $\text{grad} u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Гармоническая в области $D^- \subset \mathbb{R}^3$ функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности. Если функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ регулярны на бесконечности и $u_1, u_2 \in C^2(D^-) \cap C^1(\bar{D}^-)$, то в области $D^- \subset \mathbb{R}^3$ для них справедливы формулы Грина.

Регулярность на бесконечности функции $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, определяют

по другому. Такую функцию называют регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности. Если гармоническая в области $D^- \subset \mathbb{R}^2$ функция $u(x)$ регулярна на бесконечности, то $\text{grad} u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Если функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ гармонические в области $D^- \subset \mathbb{R}^2$ и регулярны на бесконечности, то в этой области для них справедливы формулы Грина.

8.1.5. Внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность их классических решений.

Внешняя задача Дирихле в пространстве имеет вид

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^- \subset \mathbb{R}^3; \quad u \Big|_{x \in \Sigma} = f(x); \quad u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0.$$

Её классическим решением называют функцию $u(x)$, которая определена и непрерывна в замкнутой неограниченной области $\bar{D}^-$, удовлетворяет уравнению Лапласа в открытой области D^- , принимает на границе Σ заданные значения и равномерно стремится к нулю на бесконечности. Классическое решение $u \in C(\bar{D}^-) \cap C^2(D^-)$, а определяющая его функция $f \in C(\Sigma)$. Условие $u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0$ гарантирует

регулярность функции u на бесконечности. Оно требуется для единственности решения.

Задача 8.1.

Приведите пример внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве, имеющей более одного решения, если не требовать условия $u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0$. ■

Утверждение 8.3.

Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве не может иметь более одного классического решения.

Доказательство основано на применении принципа максимума в области, ограниченной поверхностью Σ и сферой достаточно большого радиуса. ■

Внешняя задача Дирихле на плоскости имеет вид

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^- \subset \mathbb{R}^2; \quad u \Big|_{x \in \Sigma} = f(x); \quad |u(x)| < \text{const}.$$

Её классическим решением называют функцию $u(x)$, которая определена и непрерывна в замкнутой неограниченной области $\bar{D}^-$, удовлетворяет уравнению Лапласа в открытой области D^- , принимает на границе Σ заданные значения и ограничена на бесконечности. Классическое решение $u \in C(\bar{D}^-) \cap C^2(D^-)$, а определяющая его функция

$f \in C(\Sigma)$. Условие $|u(x)| < \text{const}$ означает регулярность функции u на бесконечности. Оно требуется для единственности решения.

Задача 8.2.

Приведите пример внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости, имеющей более одного решения, если не требовать условия $|u(x)| < \text{const}$. ■

Утверждение 8.4.

Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости не может иметь более одного классического решения. ■

Замечание 8.2.

Для уравнения Лапласа на плоскости требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности является жёстким, такого решения может не существовать (приведите пример!). ■

Внешняя задача Неймана в пространстве имеет вид

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^- \subset \mathbb{R}^3; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_x^+} \right|_{x \in \Sigma} = g(x); \quad u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

Её классическим решением называют функцию $u(x)$, которая в замкнутой неограниченной области $\bar{D}^-$ определена, непрерывна и имеет непрерывные первые производные, удовлетворяет уравнению Лапласа в открытой области D^- , равномерно стремится к нулю на бесконечности, а её нормальная производная принимает на границе заданные значения. Классическое решение $u \in C^1(\bar{D}^-) \cap C^2(D^-)$, а задающая краевое условие функция $g \in C(\Sigma)$. Условие $u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$ гарантирует

регулярность функции u на бесконечности. Оно требуется для единственности решения.

Утверждение 8.5.

Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа в пространстве не может иметь более одного классического решения.

Доказательство основано на первой формуле Грина для неограниченной области D^- . ■

Замечание 8.3.

Решение внешней задачи Неймана в пространстве, регулярное на бесконечности, существует для любой функции $g \in C(\Sigma)$. Требование $\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma = 0$ излишне. ■

Внешняя задача Неймана на плоскости имеет вид

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^- \subset \mathbb{R}^2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_x^+} \right|_{x \in \Sigma} = g(x); \quad |u(x)| < \text{const}.$$

Как и во внешней задаче Неймана в пространстве от классического решения требуется его регулярность на бесконечности, но теперь для

этого надо поставить условие $|u(x)| < \text{const}$. Классическое решение $u \in C^1(\bar{D}^-) \cap C^2(D^-)$, а функция $g \in C(\Sigma)$.

Утверждение 8.6.

Классическое решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа на плоскости, ограниченное и регулярное на бесконечности, определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство основано на первой формуле Грина для неограниченной области D^- . ■

Замечание 8.4.

Для существования решения внешней задачи Неймана на плоскости, регулярного на бесконечности, необходимо выполнение условия $\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma = 0$. ■

8.1.6. Ньютоновы* и логарифмические потенциалы двойного и простого слоёв.

Пусть ограниченная область $D^+ \subset \mathbb{R}^3$ имеет достаточно гладкую границу Σ , к которой применима формула Остроградского**. Пусть гармоническая в D^+ функция $u \in C^1(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+)$. Тогда основная формула Грина даёт её интегральное представление в любой точке $x \in D^+$:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+} - u(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \right) d\Sigma_y.$$

Это представление гармонической функции содержит интегралы двух типов:

$$\int_{\Sigma} \frac{\chi(y)}{|x-y|} d\Sigma_y, \quad \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Sigma_y.$$

Их называют соответственно ньютоновым потенциалом простого слоя и ньютоновым потенциалом двойного слоя; функции χ и ν — плотности, задающие эти потенциалы. Оба потенциала являются интегралами, зависящими от параметра x .

Пусть ограниченная область $D^+ \subset \mathbb{R}^2$ имеет достаточно гладкую границу Σ , к которой применима интегральная формула Грина. Пусть гармоническая в D^+ функция $u \in C^1(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+)$. Тогда основная формула Грина даёт её интегральное представление в любой точке $x \in D^+$:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+} - u(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right) \right) d\Sigma_y.$$

* Ньютон Исаак (1643–1727) — английский физик и математик.

** Остроградский Михаил Васильевич (1801–1861) — русский математик.

Это представление гармонической функции содержит интегралы двух типов:

$$\int_{\Sigma} \chi(y) \cdot \ln \frac{1}{|x-y|} d\Sigma_y, \quad \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right) d\Sigma_y.$$

Их называют соответственно логарифмическим потенциалом простого слоя и логарифмическим потенциалом двойного слоя.

Различие ньютоновых и логарифмических потенциалов состоит в разных фундаментальных решениях уравнения Лапласа: $\frac{1}{|x-y|}$ в $\mathbb{R}^3$ и $\ln \frac{1}{|x-y|}$ в $\mathbb{R}^2$.

Потенциал двойного слоя с неизвестной плотностью ν можно использовать для построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Потенциал простого слоя с неизвестной плотностью χ можно использовать для построения решения задачи Неймана для уравнения Лапласа. Оказывается, что плотности ν и χ удовлетворяют интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода.

8.2. Поверхностный потенциал двойного слоя, его свойства. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле в $\mathbb{R}^3$ к интегральным уравнениям.

Пусть в точке $y_1 \in \mathbb{R}^3$ находится заряд $-e$, а на расстоянии h от него в точке y_2 — заряд $+e$. В точке наблюдения x потенциал создаваемого этими зарядами электрического поля равен $w(x) = \frac{e}{|x-y_2|} - \frac{e}{|x-y_1|}$ (в вакууме, в системе единиц СГСЭ). Величину $\nu = eh$ называют величиной момента диполя; точки y_1 и y_2 определяют ось диполя $\vec{n}$, направленную от $-e$ к $+e$; момент диполя — это вектор $\vec{\nu} = e\vec{h}$. Если расстояние h мало по сравнению с $|x-y_1|$ и $|x-y_2|$, то к выражению $w(x)$ можно применить формулу Лагранжа*:

$$w(x) = \frac{\nu}{h} \left(\frac{1}{|x-y_2|} - \frac{1}{|x-y_1|} \right) = \frac{\nu}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \Big|_{y=y^*} \cdot h,$$

где $\vec{n}$ — единичный направляющий вектор оси диполя, а точка y^* лежит между y_1 и y_2 на этой оси.

Будем сближать y_1 и y_2 вдоль фиксированной оси $\vec{n}$, сохраняя момент диполя ($h \rightarrow 0$, $e \rightarrow +\infty$). Тогда в пределе получим точечный диполь, расположенный в точке y , с осью $\vec{n}$ и величиной момента ν (не следует думать, что заряды противоположных знаков компенсируют друг друга: в предельном переходе момент $\vec{\nu}$ сохраняется при

* Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) — французский математик.

$-e \rightarrow -\infty, +e \rightarrow +\infty$). В точке x этот точечный диполь создаёт потенциал $w(x) = \nu \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right)$, где производная берётся по координатам точки y в направлении оси $\vec{n}$ (далее опускаем стрелочку над n):

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) = \left| \text{grad}_y \frac{1}{|x - y|} \right| \cdot |n| \cdot \cos \varphi,$$

где $\left| \text{grad}_y \frac{1}{|x - y|} \right| = \frac{1}{|x - y|^2}$, $|n| = 1$, $\varphi = \widehat{(x - y, n)}$. Итак, $w(x) = \nu \cdot \frac{\cos \varphi}{|x - y|^2}$.

Пусть двусторонняя поверхность Σ является поверхностью Ляпунова, n_y — нормаль к Σ в точке $y \in \Sigma$, $|n_y| = 1$. Пусть точечные диполи распределены по поверхности Σ с поверхностной плотностью распределения $\nu(y)$. Это означает, что величина дипольного момента в точке $y \in \Sigma$ равна $\nu(y)d\Sigma_y$. Будем предполагать, что функция $\nu \in C(\Sigma)$ и что ось диполя в каждой точке $y \in \Sigma$ совпадает с направлением нормали n_y . Такой двойной слой зарядов, распределённых по Σ , создаёт в точке $x \in \mathbb{R}^3$ потенциал

$$w(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\Sigma_y = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos \varphi}{|x - y|^2} d\Sigma_y, \quad (8.1)$$

где $\varphi = \widehat{(x - y, n_y)}$.

Если $x \notin \Sigma$, то интеграл (8.1) собственный; если $x \in \Sigma$, то несобственный.

Выделим элемент $d\Sigma_y$ поверхности Σ и обозначим через $d\omega_{xy}$ телесный угол, под которым из точки x виден элемент $d\Sigma_y$. По определению $d\omega_{xy}$ есть площадь элемента единичной сферы с центром в точке x , который высекается конусом с вершиной x , опирающимся на $d\Sigma_y$. Припишем величине $d\omega_{xy}$ определённый знак, связав его выбор с направлением нормали n_y (а следовательно, с расположением положительных и отрицательных зарядов на сторонах поверхности Σ). Если радиус сферы с центром в x равен $|x - y|$, а не 1, то площадь, высекаемая на такой сфере указанным конусом, равна $|x - y|^2 \cdot d\omega_{xy}$. Рассматриваем $d\Sigma_y$ как элемент плоскости, касательной к Σ в точке y . Проведём через y плоскость, перпендикулярную вектору $x - y$, и спроектируем на неё $d\Sigma_y$. Тогда площадь этой проекции равна $\cos \varphi \cdot d\Sigma_y = |x - y|^2 \cdot d\omega_{xy}$. Будем считать, что $d\omega_{xy} > 0$, если угол φ острый, и $d\omega_{xy} < 0$, если φ тупой. Тогда

$$w(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) d\omega_{xy}. \quad (8.2)$$

Задача 8.3.

Найдите потенциал двойного слоя сферы с постоянной плотностью распределения диполей $\nu = \nu_0 = \text{const}$, если на её внутренней стороне расположены отрицательные заряды, а на внешней положительные. ■

Замечание 8.5. (теорема Гаусса*).

Пусть ограниченная область $D^+ \subset \mathbb{R}^3$ не обязательно выпуклая, но её границей является поверхность Ляпунова Σ . Пусть на Σ с постоянной плотностью $\nu_0 \neq 0$ распределены диполи (отрицательные заряды на внутренней стороне поверхности). Тогда

$$w(x) = \begin{cases} -4\pi\nu_0, & x \in D^+, \\ -2\pi\nu_0, & x \in \Sigma, \\ 0, & x \in D^-. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Далее будем считать, что поверхность Ляпунова Σ является границей ограниченной области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$, а функция ν определена и непрерывна на Σ . Потенциал двойного слоя определим, выбирая в точке $y \in \Sigma$ обе нормали n_y^- и n_y^+ :

$$w^-(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Sigma_y = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^-})}{|x-y|^2} d\Sigma_y, \quad (8.3)$$

$$w^+(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Sigma_y = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^+})}{|x-y|^2} d\Sigma_y. \quad (8.4)$$

Очевидно, что $w^+(x) = -w^-(x)$, поскольку $\widehat{(x-y, n_y^+)} = \pi - \widehat{(x-y, n_y^-)}$.

Не проводя подробных доказательств, сформулируем свойства потенциала двойного слоя (доказательства проводятся в курсе „Уравнения математической физики“).

Свойство 8.1.

Потенциал двойного слоя определён во всех точках $x \in \mathbb{R}^3$, включая точки $x \in \Sigma$.

Доказательство следует из (8.2). ■

Если $x \in \Sigma$, то значение потенциала двойного слоя в этой точке называют **прямым** значением и записывают как $w_0^-(x)$ или $w_0^+(x)$. Прямые значения $w_0^-(x)$ и $w_0^+(x)$ определены формулами (8.3) и (8.4), в которых $x \in \Sigma$.

Свойство 8.2.

Потенциал двойного слоя есть гармоническая функция в открытых областях D^+ и D^- (т.е. всюду вне поверхности Σ).

*Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) — немецкий математик.

Доказательство следует из того, что при $x \notin \Sigma$ интегралы в (8.3), (8.4) собственные, а функция $\frac{1}{|x-y|}$ гармоническая по координатам точки x . ■

Свойство 8.3.

Для поверхности Ляпунова Σ с показателем δ (см. определение 8.1) при всех $x, y \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$|\cos(\widehat{x-y, n_y^-})| \leq \text{const} \cdot |x-y|^\delta, \quad |\cos(\widehat{x-y, n_y^+})| \leq \text{const} \cdot |x-y|^\delta.$$

Доказательство основано на геометрических свойствах поверхности Ляпунова. ■

Поскольку $0 < \delta \leq 1$, свойство 8.3 означает, что потенциал двойного слоя определён формулами (8.3) или (8.4) как интегральный оператор, действующий на функцию ν , ядро которого $\frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^-})}{|x-y|^2}$ (или ядро противоположного знака) имеет слабую особенность. Если двумерную поверхность Σ задать параметрическими уравнениями, в которых параметры изменяются в замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то получим интегральный оператор, изученный в главе 7: $l = 2$, $\alpha = 2 - \delta$. По следствию 7.7 такой оператор всякую функцию ν , непрерывную на Σ , переводит в непрерывную на Σ функцию $w^-(x)$ (или $w^+(x)$). Таким образом, когда x изменяется на поверхности Σ , потенциал двойного слоя является непрерывной функцией.

Свойство 8.4.

При $|x| \rightarrow +\infty$ для потенциала двойного слоя справедлива оценка $w(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$.

Доказательство. Поскольку поверхность Σ ограничена, для любой точки $y \in \Sigma$ выполнено неравенство $|y| \leq c_1 = \text{const}$. Фиксируем число $0 < c < 1$. Тогда при достаточно больших $|x|$ для всех $y \in \Sigma$ выполнено неравенство $1 - \frac{|y|}{|x|} \geq 1 - \frac{c_1}{|x|} > c$.

Для евклидова расстояния $|x-y|$ в $\mathbb{R}^3$ из неравенства Коши–Буняковского $(x, y) \leq |x| \cdot |y|$ получаем оценку $|x-y|^2 = (x-y, x-y) = |x|^2 - 2(x, y) + |y|^2 \geq (|x| - |y|)^2 = |x|^2 \cdot \left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right)^2 > c^2 \cdot |x|^2$. Отсюда для ограниченной поверхности Σ , имеющей конечную площадь, следует оценка

$$|w(x)| = \left| \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos \varphi}{|x-y|^2} d\Sigma_y \right| < \frac{1}{c^2 \cdot |x|^2} \cdot \int_{\Sigma} |\nu(y)| d\Sigma_y = \frac{\text{const}}{|x|^2}. \quad \blacksquare$$

Для формулировки следующего свойства фиксируем произвольную точку $x_0 \in \Sigma$ и введём обозначения: $w_i^\pm(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} w^\pm(x)$, $w_e^\pm(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} w^\pm(x)$ (i — internal, e — external по отношению к области D^+).

Свойство 8.5 (теорема о скачке поверхностного потенциала двойного слоя).

Для замкнутой поверхности Σ , ограничивающей область D^+ , во всех точках $x \in \Sigma$ существуют односторонние пределы $w_i^\pm(x)$ и $w_e^\pm(x)$, причём

$$w_i^-(x) = 2\pi\nu(x) + w_0^-(x), \quad (8.5)$$

$$w_e^-(x) = -2\pi\nu(x) + w_0^-(x). \blacksquare \quad (8.6)$$

Замечание 8.6.

Условия односторонних скачков (8.5), (8.6) можно записать в виде

$$w_i^+(x) = -2\pi\nu(x) + w_0^+(x), \quad (8.7)$$

$$w_e^+(x) = 2\pi\nu(x) + w_0^+(x) \quad (8.8)$$

(проверьте!). $\blacksquare$

Следствие 8.1.

Функции $w^\pm(x)$ можно продолжить по непрерывности из открытой области D^+ в замкнутую область $\bar{D}^+$; их можно продолжить по непрерывности из D^- в $\bar{D}^-$. $\blacksquare$

Следствие 8.2.

При пересечении поверхности Σ в любой точке $x \in \Sigma$ потенциал двойного слоя претерпевает разрыв первого рода с величиной скачка $4\pi\nu(x)$ (ср. с задачей 8.3 и замечанием 8.5). $\blacksquare$

Решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа (в области D^+) можно искать в виде потенциала двойного слоя с подлежащей определению плотностью: $u(x) = w^-(x)$, $x \in D^+$. Краевое условие в этой задаче означает $w_i^-(x) = f(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.5) является интегральным уравнением относительно функции ν :

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \widehat{\cos(x-y, n_y^-)} \right) \cdot \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{2\pi} \cdot f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.9)$$

Задача 8.4.

Пусть решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле ищется в виде $u(x) = w^+(x)$, $x \in D^+$. Запишите интегральное уравнение относительно плотности ν . (**Указание.** Если $w_i^-(x) = f(x)$, $x \in \Sigma$, то $w_i^+(x) = -f(x)$, $x \in \Sigma$. Используйте (8.7).) $\blacksquare$

Решение $u(x)$ внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа (в области D^-) является гармонической функцией, регулярной на бесконечности: $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Такая функция, вообще говоря, стремится к нулю на бесконечности медленнее, чем потенциал двойного слоя (см. свойство 8.4). Поэтому в общем случае $u(x)$ нельзя представить в виде одного лишь потенциала двойного слоя. Если всё же положить $u(x) = w^+(x)$, $x \in D^-$, то краевое условие внешней задачи будет означать $w_e^+(x) = f(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.8) является интегральным уравнением относительно функции ν :

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^+})}{|x-y|^2} \right) \cdot \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{2\pi} \cdot f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) может оказаться неразрешимым!

Чтобы учесть нужное поведение решения $u(x)$ на бесконечности, можно поступить следующим образом. Будем считать, что начало координат в $\mathbb{R}^3$ находится в области D^+ . Решение внешней задачи Дирихле будем искать в виде суммы потенциала двойного слоя $w^+(x)$ с неизвестной плотностью $\nu(x)$ и кулоновского* потенциала $\frac{q}{|x|}$ от заряда неизвестной величины q , помещённого в точку $x = 0$: $u(x) = w^+(x) + \frac{q}{|x|}$. Тогда краевое условие внешней задачи означает $w_e^+(x) + \frac{q}{|x|} = f(x)$, $x \in \Sigma$. Условие одностороннего скачка (8.8) теперь является интегральным уравнением

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^+})}{|x-y|^2} \right) \cdot \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left(f(x) - \frac{q}{|x|} \right), \quad x \in \Sigma. \quad (8.11)$$

Постоянную q можно выбрать из необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (8.11) (см. теорему 2.4).

8.3. Поверхностный потенциал простого слоя, его свойства. Сведение внутренней и внешней задач Неймана в $\mathbb{R}^3$ к интегральным уравнениям.

Распределение заряда по поверхности Σ можно охарактеризовать поверхностной плотностью $\chi(y)$: заряд элемента поверхности $d\Sigma_y$ равен $\chi(y)d\Sigma_y$. В точке наблюдения $x \in \mathbb{R}^3$ потенциал электростатического поля, созданного всей заряженной поверхностью Σ , равен (в

* Кулон Шарль Огюстен (1736–1806) — французский физик.

вакууме, в системе единиц СГСЭ)

$$v(x) = \int_{\Sigma} \frac{\chi(y)}{|x - y|} d\Sigma_y. \quad (8.12)$$

Функцию χ будем считать непрерывной и ограниченной на Σ , а саму поверхность Σ — поверхностью Ляпунова. Если $x \notin \Sigma$, то интеграл (8.12) собственный, если $x \in \Sigma$, то несобственный.

Не проводя подробных доказательств, сформулируем свойства потенциала простого слоя. Снова будем считать, что поверхность Σ является границей ограниченной области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$.

Свойство 8.6.

Потенциал простого слоя определен во всех точках $x \in \mathbb{R}^3$, включая точки $x \in \Sigma$.

Доказательство при $x \in \Sigma$ следует из того, что функция χ ограничена, а $\int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_y}{|x - y|^\alpha}$ сходится при $\alpha < 2$. ■

Свойство 8.7.

Потенциал простого слоя непрерывен во всех точках $x \in \mathbb{R}^3$, включая точки $x \in \Sigma$. ■

В частности, когда x изменяется на поверхности Σ , потенциал простого слоя является непрерывной функцией.

Свойство 8.8.

Потенциал простого слоя есть гармоническая функция в открытых областях D^+ и D^- (т.е. всюду вне поверхности Σ).

Доказательство следует из того, что при $x \notin \Sigma$ интеграл (8.12) собственный, а функция $\frac{1}{|x - y|}$ гармоническая по координатам точки x . ■

Свойство 8.9.

При $|x| \rightarrow +\infty$ для потенциала простого слоя справедлива оценка $v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

Доказательство. Фиксируем число $0 < c < 1$. При всех достаточно больших $|x|$ для всех $y \in \Sigma$ выполнено неравенство $|x - y| > c \cdot |x|$ (см. доказательство свойства 8.4). Отсюда для ограниченной поверхности Σ , имеющей конечную площадь, следует оценка

$$|v(x)| = \left| \int_{\Sigma} \frac{\chi(y)}{|x - y|} d\Sigma_y \right| < \frac{1}{c \cdot |x|} \cdot \int_{\Sigma} |\chi(y)| d\Sigma_y = \frac{const}{|x|}. \quad \blacksquare$$

Фиксируем точку $z \in \Sigma$. Пусть $\vec{n}_z$ — вектор нормали к поверхности Σ в точке z (далее опускаем стрелочку над n_z), $|n_z| = 1$. В точке $x \notin \Sigma$

найдем производную функции $v(x)$ по направлению n_z :

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n_z} = \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_z} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \cdot \chi(y) d\Sigma_y.$$

Здесь производная берется по координатам точки x :

$$\frac{\partial}{\partial n_z} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = -\frac{1}{|x-y|^2} \cdot \frac{\partial |x-y|}{\partial n_z} = -\frac{(\text{grad}_x |x-y|, n_z)}{|x-y|^2} =$$

$$= -\frac{\cos(\widehat{x-y, n_z})}{|x-y|^2} = \frac{\cos(\widehat{y-x, n_z})}{|x-y|^2},$$
 так как $\text{grad}_x |x-y| = \frac{x-y}{|x-y|}$,
 $|n_z| = 1$ и $(\widehat{y-x, n_z}) = \pi - (\widehat{x-y, n_z})$. Итак,

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n_z} = \int_{\Sigma} \frac{\cos(\widehat{y-x, n_z})}{|x-y|^2} \cdot \chi(y) d\Sigma_y, \quad x \notin \Sigma, \quad z \in \Sigma. \quad (8.13)$$

Свойство 8.10.

Интеграл в (8.13) сохраняет смысл и в том случае, если $x = z \in \Sigma$. ■

При $x = z \in \Sigma$ интеграл в (8.13) называют **прямым** значением нормальной производной на Σ ; обозначение:

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x} \right)_0 = \int_{\Sigma} \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x})}{|x-y|^2} \cdot \chi(y) d\Sigma_y, \quad x \in \Sigma. \quad (8.14)$$

В качестве нормали n_x в (8.14) можно взять как n_x^- , так и n_x^+ ;

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_0 = - \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_0.$$

Поскольку для поверхности Ляпунова с показателем $0 < \delta \leq 1$ (см. определение 8.1) справедливо свойство 8.3, формула (8.14) определяет интегральный оператор, действующий на функцию χ , ядро которого

$\frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^-})}{|x-y|^2}$ (или ядро противоположного знака) имеет слабую особенность. По следствию 7.7 (при $l = 2$, $\alpha = 2 - \delta$) такой оператор

всякую функцию χ , непрерывную на Σ , переводит в непрерывную на Σ функцию $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x} \right)_0$.

Таким образом, когда x изменяется на поверхности Σ , прямое значение нормальной производной (8.14) является непрерывной функцией.

Для формулировки следующего свойства фиксируем произвольную точку $x_0 \in \Sigma$ и введём обозначения: $\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^\pm} \right)_i = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}^\pm},$

$$\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^\pm} \right)_e = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}^\pm}.$$

Замечание 8.7.

Говорят, что функция $v(x)$ имеет правильную нормальную производную на поверхности Σ , если **равномерно** по всем $x_0 \in \Sigma$ существует предел нормальной производной $\frac{\partial v(x)}{\partial n_{x_0}}$ при стремлении x к x_0

по направлению $-n_{x_0}$. Этот предел обозначают через $\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}}$. Из этого определения следует, что если правильная нормальная производная существует на Σ , то она непрерывна на Σ .

Под $\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^-} \right)_i$ и $\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^+} \right)_e$ понимаются именно правильные нормальные производные.

$$\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^+} \right)_i = - \left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^-} \right)_i, \quad \left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^-} \right)_e = - \left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}^+} \right)_e. \quad \blacksquare$$

Свойство 8.11 (теорема о скачке нормальной производной поверхностного потенциала простого слоя).

Для замкнутой поверхности Σ , ограничивающей область D^+ , во всех точках $x \in \Sigma$ существуют односторонние пределы $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^\pm} \right)_i$ и $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^\pm} \right)_e$, причём

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_i = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_0 - 2\pi\chi(x), \quad (8.15)$$

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_e = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_0 + 2\pi\chi(x). \quad \blacksquare \quad (8.16)$$

Замечание 8.8.

Условия односторонних скачков (8.15), (8.16) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_i = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_0 + 2\pi\chi(x), \quad (8.17)$$

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_e = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_0 - 2\pi\chi(x). \quad (8.18)$$

(проверьте!). $\blacksquare$

Следствие 8.3.

При пересечении поверхности Σ в любой точке $x \in \Sigma$ нормальная производная потенциала простого слоя претерпевает разрыв первого рода с величиной скачка $4\pi\chi(x)$. $\blacksquare$

Решение $u(x)$ внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в области D^+) можно искать в виде потенциала простого слоя с подлежащей определению плотностью: $u(x) = v(x)$, $x \in D^+$. Краевое условие в этой задаче означает $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_i = g(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.15) является интегральным уравнением относительно функции χ :

$$\chi(x) - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^-})}{|x-y|^2} \right) \cdot \chi(y) d\Sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \cdot g(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.19)$$

Если в (8.19) вместо нормали n_x^- выбрать нормаль n_x^+ , то знак перед интегралом надо изменить на противоположный.

Задача 8.5.

Пусть решение $u(x)$ внутренней задачи Неймана ищется в виде $u(x) = v(x)$, $x \in D^+$. Запишите интегральное уравнение относительно χ , используя производные по нормали n_x^+ . (**Указание.** Если $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_i = g(x)$, $x \in \Sigma$, то $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_i = -g(x)$, $x \in \Sigma$. Используйте (8.17).) ■

Решение $u(x)$ внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в области D^-) также можно искать в виде потенциала простого слоя с подлежащей определению плотностью: $u(x) = v(x)$, $x \in D^-$. Краевое условие в этой задаче означает $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_e = g(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.18) является интегральным уравнением относительно функции χ :

$$\chi(x) - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^+})}{|x-y|^2} \right) \cdot \chi(y) d\Sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \cdot g(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.20)$$

Если в (8.20) вместо нормали n_x^+ выбрать нормаль n_x^- , то знак перед интегралом надо изменить на противоположный.

8.4. Применение теории Фредгольма для изучения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана в пространстве.

Введём обозначение ядра интегрального оператора в уравнении (8.9):

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^-})}{|x-y|^2}. \quad (8.21)$$

Как отмечалось в разделе 8.2, ядро (8.21) имеет слабую особенность. Пусть $(A\nu)(x) = \int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y)\nu(y)d\Sigma_y$.

Если в (8.21) точки x и y на поверхности Σ поменять местами, то получим ядро интегрального оператора в уравнении (8.20), в котором выбрана нормаль n_x^- ; это ядро $\mathcal{K}(y, x)$, союзное к ядру $\mathcal{K}(x, y)$. Таким образом, имеем пару сопряжённых друг другу (**союзных**, т.к. все функции здесь действительные) неоднородных уравнений:

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y)\nu(y)d\Sigma_y = \frac{1}{2\pi} \cdot f(x) \quad (8.9)$$

— для построения решения внутренней задачи Дирихле (в D^+),

$$\chi(x) + \int_{\Sigma} \mathcal{K}(y, x)\chi(y)d\Sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \cdot g(x) \quad (8.20)$$

— для построения решения внешней задачи Неймана (в D^-). Коротко:

$$\nu - \mu \cdot A\nu = \frac{f}{2\pi} \quad \text{при} \quad \mu = -1, \quad (8.9)$$

$$\chi - \mu \cdot A^*\chi = -\frac{g}{2\pi} \quad \text{при} \quad \mu = -1. \quad (8.20)$$

В уравнениях (8.9) и (8.10) используются противоположно направленные нормали n_y^- и n_y^+ , поэтому ядром в уравнении (8.10) является функция $-\mathcal{K}(x, y)$. Если в ядре уравнения (8.10) поменять местами точки x и y на поверхности Σ , то получим ядро в уравнении (8.19), в котором выбрана нормаль n_x^+ (сравните ядро в (8.19) с ядром (8.21)). Таким образом, имеем ещё одну пару союзных друг другу неоднородных уравнений:

$$\nu(x) - \int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y)\nu(y)d\Sigma_y = \frac{1}{2\pi} \cdot f(x) \quad (8.10)$$

и уравнение для построения решения внутренней задачи Неймана (в D^+):

$$\chi(x) - \int_{\Sigma} \mathcal{K}(y, x)\chi(y)d\Sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \cdot g(x). \quad (8.19)$$

коротко:

$$\nu - \mu \cdot A\nu = \frac{f}{2\pi} \quad \text{при} \quad \mu = +1, \quad (8.10)$$

$$\chi - \mu \cdot A^*\chi = -\frac{g}{2\pi} \quad \text{при} \quad \mu = +1. \quad (8.19)$$

Если поверхность Σ задать параметрическими уравнениями, в которых параметры изменяются в замкнутой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то уравнения (8.9), (8.20) и (8.10), (8.19) будут уравнениями со слабой особенностью, изученными в главе 7. Для них справедливы теоремы Фредгольма. По постановкам задач Дирихле и Неймана свободные члены в этих уравнениях суть непрерывные на Σ функции. Поэтому по теореме 7.5 любое решение каждого из этих уравнений будет непрерывно на Σ , если это решение существует.

Утверждение 8.7.

Для уравнений (8.9) и (8.20) число $\mu = -1$ является правильным значением. ■

Лемма 8.1.

Если потенциал простого слоя равен нулю всюду в $\mathbb{R}^3$, то его плотность χ равна нулю всюду на поверхности Σ .

Доказательство.

По следствию 8.3 при пересечении поверхности Σ нормальная производная потенциала простого слоя должна претерпевать разрыв первого рода с величиной скачка $4\pi\chi(x)$, $x \in \Sigma$. Но для всюду равного нулю потенциала этот скачок равен нулю. Поэтому $\chi(x) \equiv 0$ на поверхности Σ . ■

Доказательство утверждения 8.7.

Предположим, что число $\mu = -1$ является характеристическим для уравнений (8.9) и (8.20). Пусть $\overset{\circ}{\chi}$ — отвечающая этому числу собственная функция оператора A^* с ядром $K(y, x)$, т.е. при всех $x \in \Sigma$

$$\overset{\circ}{\chi}(x) = - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^-})}{|x-y|^2} \right) \cdot \overset{\circ}{\chi}(y) d\Sigma_y. \quad (8.22)$$

По следствию 7.8 функция $\overset{\circ}{\chi}$ непрерывна на Σ . Построим потенциал простого слоя $v(x)$ с плотностью $\overset{\circ}{\chi}$.

По свойствам потенциала простого слоя функция v является гармонической в областях D^+ и D^- , непрерывна всюду в $\mathbb{R}^3$, и $v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \rightarrow +\infty$. В силу условия одностороннего скачка (8.16) и равенства (8.22) правильная нормальная производная $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_e = -\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_e \equiv 0$ на поверхности Σ .

Рассмотрим внешнюю задачу Неймана (в D^-):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^-; \quad \frac{\partial u}{\partial n_x^+} \Big|_{x \in \Sigma} = 0; \quad u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

Потенциал простого слоя v является решением этой задачи. По утверждению 8.5 о единственности решения внешней задачи Неймана

$v(x) \equiv 0$ в замкнутой области $\bar{D}^-$. В частности, $v(x) \equiv 0$ на поверхности Σ .

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле (в D^+):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^+; \quad u|_{x \in \Sigma} = 0.$$

Потенциал простого слоя v является решением этой задачи. По утверждению 8.1 о единственности решения внутренней задачи Дирихле $v(x) \equiv 0$ в замкнутой области $\bar{D}^+$. Следовательно, $v(x) = 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$. По лемме 8.1 $\overset{\circ}{\chi}(x) \equiv 0$ на поверхности Σ . — Противоречие! ■

Следствие 8.4.

Уравнения (8.9) и (8.20) однозначно разрешимы при любых функциях f и g , непрерывных на поверхности Σ . ■

Следствие 8.5.

Внутренняя задача Дирихле в пространстве разрешима при любой непрерывной на Σ функции f , и её решение представляется потенциалом двойного слоя.

Внешняя задача Неймана в пространстве разрешима при любой непрерывной на Σ функции g , и её решение представляется потенциалом простого слоя. ■

Утверждение 8.8.

Для уравнений (8.10) и (8.19) число $\mu = +1$ является характеристическим значением. Его геометрическая кратность равна 1.

Доказательство.

Рассмотрим потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\nu(x) \equiv 1$ на Σ :

$$w^-(x) = \int_{\Sigma} \frac{\widehat{\cos(x-y, n_y^-)}}{|x-y|^2} d\Sigma_y.$$

По теореме Гаусса (см. замечание 8.5) $w^-(x) = 2\pi$ при всех $x \in \Sigma$, т.е. $\int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y) d\Sigma_y \equiv 1$ на Σ . Это и означает, что $\mu = +1$ есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$, которому отвечает собственная функция $\overset{\circ}{\nu}(x) \equiv 1$.

Докажем, что геометрическая кратность числа $\mu = +1$ равна 1. По теореме 2.3 достаточно доказать, что для ядра $\mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$ характеристическое число $\mu = +1$ имеет геометрическую кратность 1. Пусть $\overset{\circ}{\chi}$ — собственная функция ядра $\mathcal{K}^*$, отвечающая этому характеристическому значению:

$$\overset{\circ}{\chi}(x) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\widehat{\cos(y-x, n_x^-)}}{|x-y|^2} \right) \cdot \overset{\circ}{\chi}(y) d\Sigma_y. \quad (8.23)$$

По следствию 7.8 функция $\overset{\circ}{\chi}$ непрерывна на Σ . Построим потенциал простого слоя $v(x)$ с плотностью $\overset{\circ}{\chi}$.

По свойствам потенциала простого слоя функция v является гармонической в областях D^+ и D^- , непрерывна всюду в $\mathbb{R}^3$, и $v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \rightarrow +\infty$. В силу условия одностороннего скачка (8.15) и равенства (8.23) правильная нормальная производная $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_i \equiv 0$ на поверхности Σ .

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана (в D^+):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^+; \quad \frac{\partial u}{\partial n_x^-} \Big|_{x \in \Sigma} = 0.$$

Потенциал простого слоя v является решением этой задачи. По утверждению 8.2 о единственности решения внутренней задачи Неймана с точностью до произвольной постоянной имеем $v(x) \equiv c = \text{const}$ в замкнутой области $\bar{D}^+$. Докажем, что эта постоянная $c \neq 0$.

Предположим противное, тогда $v(x) \equiv 0$ в $\bar{D}^+$. В частности, $v(x) \equiv 0$ на поверхности Σ . Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле (в D^-):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^-; \quad u|_{x \in \Sigma} = 0; \quad u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0. \quad (8.24)$$

Предположение $c = 0$ означает, что потенциал простого слоя v является решением этой задачи. По утверждению 8.3 о единственности решения внешней задачи Дирихле $v(x) \equiv 0$ в замкнутой области $\bar{D}^-$. Следовательно, $v(x) = 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$. Тогда по лемме 8.1 $\overset{\circ}{\chi}(x) \equiv 0$ на поверхности Σ . — Противоречие! Поэтому $c \neq 0$. Пусть наряду с $\overset{\circ}{\chi}$ характеристическому числу $\mu = +1$ ядра $\mathcal{K}^*$ соответствует ещё одна собственная функция $\overset{\circ}{\chi}_1$. Построим потенциал простого слоя $v_1(x)$ с плотностью $\overset{\circ}{\chi}_1$. Как доказано выше, $v_1(x) \equiv c_1 = \text{const}$ в замкнутой области $\bar{D}^+$, причём $c_1 \neq 0$. Рассмотрим потенциал простого слоя $V(x) = \frac{c_1}{c} \cdot v(x) - v_1(x)$ с плотностью $\frac{c_1}{c} \cdot \overset{\circ}{\chi}(x) - \overset{\circ}{\chi}_1(x)$. В замкнутой области $\bar{D}^+$ получаем $V(x) = \frac{c_1}{c} \cdot c - c_1 \equiv 0$. В частности, $V(x) \equiv 0$ на поверхности Σ . Поэтому $V(x)$ является решением внешней задачи Дирихле (8.24) и по утверждению 8.3 $V(x) \equiv 0$ в $\bar{D}^-$. Следовательно, $V(x) = 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$. По лемме 8.1 на поверхности Σ выполнено тождество $\frac{c_1}{c} \cdot \overset{\circ}{\chi}(x) \equiv \overset{\circ}{\chi}_1(x)$. Это и означает, что характеристическое число $\mu = +1$ ядра $\mathcal{K}^*$ имеет геометрическую кратность 1. ■

Итак, каждое из однородных уравнений $\overset{\circ}{\nu} = A\overset{\circ}{\nu}$ и $\overset{\circ}{\chi} = A^*\overset{\circ}{\chi}$ имеет ровно по одному нетривиальному решению (с точностью до ненулево-

го постоянного множителя); причём, $\overset{\circ}{\nu}(x) \equiv 1$ (см. начало доказательства утверждения 8.8). По теореме 2.4 неоднородное уравнение (8.19) разрешимо в том, и только в том случае, если $g \perp \overset{\circ}{\nu}$, т.е.

$$\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma_x = 0. \quad (8.25)$$

Следствие 8.6.

Внутренняя задача Неймана в пространстве разрешима в том, и только в том случае, если непрерывная на Σ функция g удовлетворяет условию ортогональности (8.25). Решение этой задачи представляется суммой потенциала простого слоя и произвольной постоянной. ■

Задача 8.6.

Исходя из уравнения (8.19) при $\mu = +1$, проверьте, что если решение внутренней задачи Неймана в пространстве существует, то оно определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого. ■

Замечание 8.9.

Для любого потенциала простого слоя v из условий односторонних скачков (8.15) и (8.16) следует равенство

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_e - \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_i = 4\pi \chi(x).$$

Пусть плотность $\overset{\circ}{\chi}$ потенциала v удовлетворяет уравнению (8.23). Тогда $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_i \equiv 0$ на Σ , и выполнено равенство

$$\overset{\circ}{\chi}(x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_e = -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_e, \quad (8.26)$$

где $x \in \Sigma$. ■

Единственную собственную функцию $\overset{\circ}{\chi}$ оператора A^* при $\mu = +1$ (см. (8.23)) нормируем так, чтобы потенциал простого слоя $v_R(x) = \int_{\Sigma} \frac{\overset{\circ}{\chi}(y)}{|x-y|} d\Sigma_y \equiv 1$ в замкнутой области $\bar{D}^+$. Такой потенциал называют **потенциалом Робена** или равновесным потенциалом: плотность $\overset{\circ}{\chi}$ распределения зарядов на Σ даёт постоянный потенциал в $\bar{D}^+$. Плотность равновесного потенциала удовлетворяет равенству (8.26).

По теореме 2.4 уравнение (8.10) разрешимо в том, и только в том случае, если $f \perp \overset{\circ}{\chi}$, т.е.

$$\int_{\Sigma} f(x) \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x = 0. \quad (8.27)$$

Следствие 8.7.

Внешняя задача Дирихле в пространстве имеет решение, представимое потенциалом двойного слоя, в том, и только в том случае, если непрерывная на Σ функция f ортогональна к плотности $\overset{\circ}{\chi}$ потенциала Робена. ■

Если условие ортогональности (8.27) для функции f не выполнено, то решение внешней задачи Дирихле можно искать с помощью уравнения (8.11). При этом надо считать, что начало координат принадлежит области D^+ . По теореме 2.4 уравнение (8.11) разрешимо в том, и только в том случае, если

$$\int_{\Sigma} \left(f(x) - \frac{q}{|x|} \right) \cdot \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x = 0. \quad (8.28)$$

Поскольку точка $x = 0$ принадлежит области D^+ , имеем $\int_{\Sigma} \frac{\overset{\circ}{\chi}(y)}{|y|} d\Sigma_y = v_R(x = 0) = 1$. Поэтому условие ортогональности (8.28) означает, что $q = \int_{\Sigma} f(x) \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x$.

Следствие 8.8.

Внешняя задача Дирихле в пространстве разрешима при любой непрерывной на Σ функции f , и её решение представляется суммой потенциала двойного слоя и кулоновского потенциала $\frac{1}{|x|} \cdot \int_{\Sigma} f(x) \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x$. ■

Задача 8.7.

Пусть выполнено условие ортогональности (8.28). При $\mu = +1$ уравнение (8.11) имеет общее решение $\nu(x) + c \cdot \overset{\circ}{\nu}(x) = \nu(x) + c$, где c — произвольная постоянная. Докажите, что тем не менее решение внешней задачи Дирихле единственно. ■

Для нахождения постоянной q нет необходимости искать собственную функцию $\overset{\circ}{\chi}$ уравнения (8.23). Решение внешней задачи Дирихле (в $D^- \subset \mathbb{R}^3$) по-прежнему будем искать в виде $u(x) = w^+(x) + \frac{q}{|x|}$, где w^+ — потенциал двойного слоя с неизвестной плотностью ν , а постоянная $q = \int_{\Sigma} \nu(y) d\Sigma_y$. Тогда уравнение (8.11) примет вид

$$\nu(x) - \int_{\Sigma} \left(\mathcal{K}(x, y) - \frac{1}{2\pi|x|} \right) \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{2\pi} \cdot f(x). \quad (8.11')$$

Докажем, что уравнение (8.11') однозначно разрешимо. Для этого по-

ложим $f(x) \equiv 0$ на Σ и рассмотрим однородное уравнение

$$\mathring{\nu}(x) - \int_{\Sigma} \left(\mathcal{K}(x, y) - \frac{1}{2\pi|x|} \right) \mathring{\nu}(y) d\Sigma_y = 0. \quad (8.11^\circ)$$

Ядро $\mathcal{K}$ имеет слабую особенность на Σ , а функция $\frac{1}{2\pi|x|}$ непрерывна на Σ (по-прежнему считаем, что начало координат принадлежит области D^+). Поэтому ядро в уравнении (8.11 $^\circ$) имеет слабую особенность. По теореме 7.5 любое решение $\mathring{\nu}$ уравнения (8.11 $^\circ$) непрерывно на Σ . Следовательно, определён потенциал двойного слоя $W(x) = \int_{\Sigma} \mathring{\nu}(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\Sigma_y$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ функцию $u_0(x) = W(x) + \frac{1}{|x|} \cdot \int_{\Sigma} \mathring{\nu}(y) d\Sigma_y$. Потенциал W удовлетворяет условию одностороннего скачка (8.8), поэтому левая часть в уравнении (8.11 $^\circ$) является пределом функции $\frac{u_0(x)}{2\pi}$ при стремлении точки $x \in D^-$ к поверхности Σ ; этот предел равен нулю. Следовательно, функция u_0 удовлетворяет внешней задаче Дирихле:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^-; \quad u|_{x \in \Sigma} = 0; \quad u(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

По утверждению 8.3 о единственности решения внешней задачи Дирихле $u_0(x) \equiv 0$ в $\bar{D}^-$. Тогда $|x| \cdot u_0(x) \equiv 0$ в $\bar{D}^-$; переходя здесь к пределу при $|x| \rightarrow +\infty$ и учитывая, что потенциал двойного слоя W имеет асимптотику $O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ на бесконечности (см. свойство 8.4) получаем $\int_{\Sigma} \mathring{\nu}(y) d\Sigma_y = 0$. Уравнение (8.11 $^\circ$) принимает вид $\mathring{\nu} = A\mathring{\nu}$; его решение $\mathring{\nu}(x) \equiv \text{const}$ на Σ . Поскольку интеграл от $\mathring{\nu}$ по Σ равен нулю, то $\mathring{\nu}(x) \equiv 0$ на Σ . Итак, уравнение (8.11 $^\circ$) имеет только тривиальное решение. По альтернативе Фредгольма уравнение (8.11') однозначно разрешимо.

8.5. Логарифмический потенциал двойного слоя. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле в $\mathbb{R}^2$ к интегральным уравнениям.

Теперь пусть D^+ и D^- — области на плоскости $\mathbb{R}^2$, Σ — кривая Ляпунова, $d\Sigma$ — дифференциал длины её дуги. Пусть функция $\nu(x)$ определена и непрерывна на Σ . Логарифмический потенциал двойного

слоя $w(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\ln \frac{1}{|x - y|} \right) d\Sigma_y$ можно записать в виде

$$w(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos \varphi}{|x - y|} d\Sigma_y, \quad (8.29)$$

где $\varphi = \widehat{(x - y, n_y)}$ (докажите!).

Если $x \notin \Sigma$, то интеграл (8.29) собственный; если $x \in \Sigma$, то несобственный.

Выделим элемент $d\Sigma_y$ кривой Σ и обозначим через $d\omega_{xy}$ **плоский** угол, под которым из точки x виден элемент $d\Sigma_y$. Величине $d\omega_{xy}$ можно приписать определённый знак, связав его выбор с направлением нормали n_y . Тогда

$$w(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) d\omega_{xy} \quad (8.30)$$

(докажите!).

Логарифмический потенциал двойного слоя можно определить, выбирая в точке $y \in \Sigma$ обе нормали n_y^- и n_y^+ :

$$w^-(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^-} \left(\ln \frac{1}{|x - y|} \right) d\Sigma_y = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos(\widehat{x - y, n_y^-})}{|x - y|} d\Sigma_y, \quad (8.31)$$

$$w^+(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y^+} \left(\ln \frac{1}{|x - y|} \right) d\Sigma_y = \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos(\widehat{x - y, n_y^+})}{|x - y|} d\Sigma_y, \quad (8.32)$$

$$w^+(x) = -w^-(x)$$

Задача 8.8.

Найдите логарифмический потенциал двойного слоя w^+ для окружности с постоянной плотностью $\nu = \nu_0 = \text{const}$. ■

Замечание 8.10 (теорема Гаусса).

Пусть ограниченная область $D^+ \subset \mathbb{R}^2$ не обязательно выпуклая, но её границей является кривая Ляпунова Σ . Пусть плотность $\nu = \nu_0 = \text{const} \neq 0$. тогда

$$w^+(x) = \begin{cases} -2\pi\nu_0, & x \in D^+, \\ -\pi\nu_0, & x \in \Sigma, \\ 0, & x \in D^-. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Свойство 8.12.

Логарифмический потенциал двойного слоя определён во всех точках $x \in \mathbb{R}^2$, включая точки $x \in \Sigma$.

Доказательство следует из (8.30). ■

Если $x \in \Sigma$, то значение логарифмического потенциала двойного слоя в этой точке называют **прямым** значением: $w_0^-(x)$ или $w_0^+(x)$.

Свойство 8.13.

Логарифмический потенциал двойного слоя есть гармоническая функция в открытых областях D^+ и D^- (т.е. всюду вне кривой Σ).

Доказательство следует из того, что при $x \notin \Sigma$ интегралы в (8.31), (8.32) собственные, а функция $\ln \frac{1}{|x-y|}$ гармоническая по координатам точки x . ■

Формулы (8.31) или (8.32) определяют логарифмический потенциал двойного слоя как интегральный оператор, действующий на функцию ν . Если кривая Ляпунова Σ имеет показатель $0 < \delta < 1$, то ядро этого оператора имеет слабую особенность. Кривую Σ можно задать параметрическими уравнениями, в которых параметр изменяется на отрезке $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$; тогда получим интегральный оператор, изученный в главе 7: $l = 1$, $\alpha = 1 - \delta$. Если кривая Ляпунова имеет показатель $\delta = 1$, то ядро интегрального оператора в (8.31), (8.32) ограничено. По следствию 7.7 логарифмический потенциал двойного слоя является непрерывной функцией, когда x изменяется на кривой Σ .

Свойство 8.14.

$$w(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0.$$

Доказательство. (См. свойство 8.4.)

Фиксируем число $0 < c < 1$. Для евклидова расстояния $|x-y|$ в $\mathbb{R}^2$ имеем оценку $|x-y| > c \cdot |x|$ при достаточно больших $|x|$ и для всех $y \in \Sigma$. Отсюда

$$|w(x)| = \left| \int_{\Sigma} \nu(y) \cdot \frac{\cos \varphi}{|x-y|} d\Sigma_y \right| < \frac{const}{|x|}, \text{ т.е. } w(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow +\infty. \blacksquare$$

Свойство 8.15 (теорема о скачке логарифмического потенциала двойного слоя).

Для замкнутой кривой Σ , ограничивающей область D^+ , во всех точках $x \in \Sigma$ существуют односторонние пределы $w_i^{\pm}(x)$ и $w_e^{\pm}(x)$, причём

$$w_i^-(x) = \pi\nu(x) + w_0^-(x), \quad (8.33)$$

$$w_e^-(x) = -\pi\nu(x) + w_0^-(x). \blacksquare \quad (8.34)$$

Замечание 8.11.

Условия односторонних скачков (8.33), (8.34) можно записать в

виде

$$w_i^+(x) = -\pi\nu(x) + w_0^+(x), \quad (8.35)$$

$$w_e^+(x) = \pi\nu(x) + w_0^+(x) \quad (8.36)$$

(проверьте!). ■

Следствие 8.9.

Функции $w^\pm(x)$ можно продолжить по непрерывности из открытой области D^+ в замкнутую область $\bar{D}^+$; их можно продолжить по непрерывности из D^- в $\bar{D}^-$. ■

Следствие 8.10.

При пересечении кривой Σ в любой точке $x \in \Sigma$ логарифмический потенциал двойного слоя претерпевает разрыв первого рода с величиной скачка $2\pi\nu(x)$ (ср. с задачей 8.8 и замечанием 8.10; ср. со следствием 8.2). ■

Решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа (в области D^+) можно искать в виде логарифмического потенциала двойного слоя с подлежащей определению плотностью: $u(x) = w^-(x)$, $x \in D^+$. Краевое условие в этой задаче означает $w_i^-(x) = f(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.33) является интегральным уравнением относительно функции ν :

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^-})}{|x-y|} \right) \cdot \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{\pi} \cdot f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.37)$$

Задача 8.9.

Пусть решение внутренней задачи Дирихле ищется в виде $u(x) = w^+(x)$, $x \in D^+$. Запишите интегральное уравнение относительно плотности ν . (**Указание.** Если $w_i^-(x) = f(x)$, $x \in \Sigma$, то $w_i^+(x) = -f(x)$, $x \in \Sigma$. Используйте (8.35).) ■

Решение $u(x)$ внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа (в области D^-) является гармонической функцией, ограниченной на бесконечности. Такая функция, вообще говоря, не стремится к нулю на бесконечности. Поэтому из свойства 8.14 следует, что в общем случае $u(x)$ нельзя представить в виде одного лишь логарифмического потенциала двойного слоя. Если всё же положить $u(x) = w^+(x)$, $x \in D^-$, то краевое условие внешней задачи будет означать $w_e^+(x) = f(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.36) является интегральным уравнением относительно функции ν :

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^+})}{|x-y|} \right) \cdot \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{\pi} \cdot f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.38)$$

Уравнение (8.38) может оказаться неразрешимым!

Чтобы не накладывать слишком жёсткое условие на поведение решения $u(x)$ на бесконечности, можно поступить следующим образом. Решение внешней задачи Дирихле будем искать в виде $w^+(x) + q$, где $q = \text{const}$. Тогда краевое условие внешней задачи означает $w_e^+(x) + q = f(x)$, $x \in \Sigma$. Условие одностороннего скачка (8.36) теперь является интегральным уравнением

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^+})}{|x-y|} \right) \cdot \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{\pi} \cdot (f(x) - q), \quad x \in \Sigma. \quad (8.39)$$

Постоянную q можно выбрать из необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (8.39) (см. теорему 2.4).

8.6. Логарифмический потенциал простого слоя. Сведение внутренней и внешней задач Неймана в $\mathbb{R}^2$ к интегральным уравнениям.

Плотность $\chi(x)$, непрерывная на кривой Ляпунова $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, задаёт логарифмический потенциал простого слоя

$$v(x) = \int_{\Sigma} \chi(y) \cdot \ln \frac{1}{|x-y|} d\Sigma_y. \quad (8.40)$$

Если $x \notin \Sigma$, то интеграл (8.40) собственный, если $x \in \Sigma$, то несобственный. Как и выше, считаем, что Σ — граница областей D^+ и D^- в $\mathbb{R}^2$.

Свойство 8.16.

Логарифмический потенциал простого слоя определён во всех точках $x \in \mathbb{R}^2$, включая точки $x \in \Sigma$.

Доказательство при $x \in \Sigma$ следует из того, что функция χ ограничена, а $\int_{\Sigma} \ln \frac{1}{|x-y|} d\Sigma_y$ сходится, т.к. при $0 < \alpha < 1$ выполнено

$$\ln \frac{1}{|x-y|} < \frac{1}{|x-y|^\alpha}. \blacksquare$$

Свойство 8.17.

Логарифмический потенциал простого слоя непрерывен во всех точках $x \in \mathbb{R}^2$, включая точки $x \in \Sigma$. $\blacksquare$

В частности, когда x изменяется на кривой Σ , логарифмический потенциал простого слоя является непрерывной функцией.

Свойство 8.18.

Логарифмический потенциал простого слоя есть гармоническая функция в открытой области D^+ и в любой ограниченной открытой подобласти области D^- (т.е. всюду вне кривой Σ).

Доказательство следует из того, что при $x \notin \Sigma$ интеграл (8.40) собственный, а функция $\ln \frac{1}{|x-y|}$ гармоническая по координатам точки x . ■

Замечание 8.12.

Логарифмический потенциал простого слоя, вообще говоря, не ограничен при $|x| \rightarrow +\infty$. (См. ниже задачу 8.11.) ■

Задача 8.10.

Фиксируем точку $z \in \Sigma$. Докажите, что производная функции $v(x)$, $x \notin \Sigma$, по нормали n_z имеет вид

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n_z} = \int_{\Sigma} \frac{\cos(\widehat{y-x, n_z})}{|x-y|} \cdot \chi(y) d\Sigma_y, \quad x \notin \Sigma, \quad z \in \Sigma. \quad (8.41) \quad \blacksquare$$

Свойство 8.19.

Интеграл в (8.41) сохраняет смысл и в том случае, если $x = z \in \Sigma$. ■

При $x = z \in \Sigma$ интеграл в (8.41) называют **прямым** значением нормальной производной на Σ . В качестве нормали в (8.41) можно взять как n_x^- , так и n_x^+ .

Формула (8.41) при $x = z \in \Sigma$ определяет интегральный оператор, действующий на функцию χ , ядро которого имеет слабую особенность, если показатель кривой Ляпунова Σ удовлетворяет условию $0 < \delta < 1$ ($l = 1, \alpha = 1 - \delta$ в обозначениях главы 7). Если же $\delta = 1$, то ядро ограничено. По следствию 7.7 такой интегральный оператор всякую функцию χ , непрерывную на Σ , переводит в непрерывную на Σ функцию $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x}\right)_0$ — прямое значение нормальной производной.

Как и для потенциала простого слоя в $\mathbb{R}^3$, для функции $v(x)$ введём её правильные нормальные производные на кривой Σ (символы i и e имеют прежний смысл).

Свойство 8.20 (теорема о скачке нормальной производной логарифмического потенциала простого слоя).

Для замкнутой кривой Σ , ограничивающей область D^+ , во всех точках $x \in \Sigma$ существуют односторонние пределы $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^\pm}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^\pm}\right)_e$, причём

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_i = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_0 - \pi\chi(x), \quad (8.42)$$

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_e = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_0 + \pi\chi(x). \quad \blacksquare \quad (8.43)$$

Замечание 8.13.

Условия односторонних скачков (8.42), (8.43) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_i = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_0 + \pi\chi(x), \quad (8.44)$$

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_e = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_0 - \pi\chi(x) \quad (8.45)$$

(проверьте!). ■

Следствие 8.11.

При пересечении кривой Σ в любой точке $x \in \Sigma$ нормальная производная логарифмического потенциала простого слоя претерпевает разрыв первого рода с величиной скачка $2\pi\chi(x)$. ■

Задача 8.11.

Пусть Σ — окружность радиуса R с центром в начале координат, плотность $\chi = \chi_0 = \text{const}$. Найдите значения логарифмического потенциала простого слоя $v(x)$ внутри Σ , на Σ , вне Σ . Убедитесь, что $v(x) = O\left(\ln \frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \rightarrow +\infty$. (**Указание.** Используйте свойства логарифмического потенциала простого слоя.) ■

Решение $u(x)$ внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в области D^+) можно искать в виде логарифмического потенциала простого слоя с подлежащей определению плотностью: $u(x) = v(x)$, $x \in D^+$. Краевое условие в этой задаче означает $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-}\right)_i = g(x)$, $x \in \Sigma$. Тогда условие одностороннего скачка (8.42) является интегральным уравнением относительно функции χ :

$$\chi(x) - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^-})}{|x-y|} \right) \cdot \chi(y) d\Sigma_y = -\frac{1}{\pi} \cdot g(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.46)$$

Аналогичное по смыслу уравнение можно записать, используя производные по нормали n_x^+ (ср. с задачей 8.5).

Решение $u(x)$ внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа (в области D^-) должно быть ограниченным на бесконечности. Логарифмический потенциал простого слоя $v(x)$ может этому требованию не удовлетворять. Если всё же положить $u(x) = v(x)$, $x \in D^-$, то краевое условие внешней задачи означает $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+}\right)_e = g(x)$, $x \in \Sigma$, а условие одностороннего скачка (8.45) является интегральным уравнением от-

носителем искомой плотности χ :

$$\chi(x) - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^+})}{|x-y|} \right) \cdot \chi(y) d\Sigma_y = -\frac{1}{\pi} \cdot g(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.47)$$

При этом функцию g необходимо подчинить некоторому условию, которое гарантировало бы, что решение χ уравнения (8.47) даст ограниченный на бесконечности логарифмический потенциал $v(x)$.

Уравнение, аналогичное по смыслу уравнению (8.47), можно записать, используя производные по нормали n_x^- .

Лемма 8.2.

Пусть непрерывная плотность χ логарифмического потенциала простого слоя v удовлетворяет условию

$$\int_{\Sigma} \chi(y) d\Sigma_y = 0. \quad (8.48)$$

Тогда $v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$ (а следовательно, потенциал v ограничен на бесконечности).

Доказательство.

Равенство (8.48) умножим на $\ln|x|$ и сложим с формулой (8.40), определяющей потенциал v с плотностью χ : $v(x) = \int_{\Sigma} \chi(y) \ln \frac{|x|}{|x-y|} d\Sigma_y$. Кривая Σ ограничена, поэтому для всех $y \in \Sigma$ выполнены неравенства $|y| \leq c_1 = \text{const}$ и $|\chi(y)| \leq c_2 = \text{const}$. Тогда из неравенства $|x| \leq |x-y| + |y|$ получаем

$$|v(x)| \leq \int_{\Sigma} |\chi(y)| \cdot \ln \left(1 + \frac{|y|}{|x-y|} \right) d\Sigma_y \leq c_2 \cdot \int_{\Sigma} \ln \left(1 + \frac{c_1}{|x-y|} \right) d\Sigma_y \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0,$$

т.к. для точек y ограниченной кривой $|x-y| \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$. ■

Утверждение 8.9.

Пусть функция χ является непрерывным решением уравнения (8.47), в котором непрерывная функция g удовлетворяет условию $\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma_x = 0$. Тогда логарифмический потенциал простого слоя v с плотностью χ ограничен на бесконечности (и даже $v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$).

Доказательство.

Обе части уравнения (8.47) проинтегрируем по кривой Σ :

$$\int_{\Sigma} \chi(x) d\Sigma_x - \int_{\Sigma} \left[\int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^+})}{|x-y|} \right) \cdot \chi(y) d\Sigma_y \right] d\Sigma_x = 0.$$

В первом слагаемом переменную x заменим на y , а в повторном интеграле изменим порядок интегрирования:

$$\int_{\Sigma} \chi(y) d\Sigma_y - \int_{\Sigma} \left[\int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^+})}{|x-y|} d\Sigma_x \right] \cdot \chi(y) d\Sigma_y = 0.$$

По теореме Гаусса (см. замечание 8.10) для логарифмического потенциала двойного слоя с плотностью $\nu(x) \equiv 1$ имеем $w^+(y) = -\pi$ при $y \in \Sigma$. Поэтому (см. (8.32)) $2 \cdot \int_{\Sigma} \chi(y) d\Sigma_y = 0$. Теперь доказываемое утверждение следует из леммы 8.2. ■

Задача 8.12.

Пусть логарифмический потенциал простого слоя v с непрерывной на Σ плотностью χ удовлетворяет условию $v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$ (здесь Σ — граница области D^+). Докажите, что $\int_{\Sigma} \chi(y) d\Sigma_y = 0$. ■

Задача 8.13.

Пусть логарифмический потенциал простого слоя $v(x)$ задан непрерывной на Σ плотностью χ , для которой $\int_{\Sigma} \chi(y) d\Sigma_y \neq 0$. Докажите, что $|v(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$. ■

8.7. Применение теории Фредгольма для изучения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана на плоскости.

Введём обозначение ядра интегрального оператора в уравнении (8.37):

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{x-y, n_y^-})}{|x-y|}. \quad (8.49)$$

Как отмечалось в разделе 8.5, ядро (8.49) либо имеет слабую особенность, либо ограничено. Пусть $(A\nu)(x) = \int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y) \nu(y) d\Sigma_y$. Имеем пару союзных неоднородных уравнений:

$$\nu(x) + \int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y) \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{\pi} \cdot f(x) \quad (8.37)$$

— для построения решения внутренней задачи Дирихле (в D^+),

$$\chi(x) + \int_{\Sigma} \mathcal{K}(y, x) \chi(y) d\Sigma_y = -\frac{1}{\pi} g(x) \quad (8.47)$$

— для построения решения внешней задачи Неймана (в D^-). Коротко:

$$\nu - \mu \cdot A\nu = \frac{f}{\pi} \quad \text{при} \quad \mu = -1, \quad (8.37)$$

$$\chi - \mu \cdot A^*\chi = -\frac{g}{\pi} \quad \text{при} \quad \mu = -1. \quad (8.47)$$

Еще одна пара союзных неоднородных уравнений:

$$\nu(x) - \int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y) \nu(y) d\Sigma_y = \frac{1}{\pi} \cdot f(x) \quad (8.38)$$

и уравнение для построения решения внутренней задачи Неймана (в D^+):

$$\chi(x) - \int_{\Sigma} \mathcal{K}(y, x) \chi(y) d\Sigma_y = -\frac{1}{\pi} \cdot g(x). \quad (8.46)$$

Коротко:

$$\nu - \mu \cdot A\nu = \frac{f}{\pi} \quad \text{при} \quad \mu = +1, \quad (8.38)$$

$$\chi - \mu \cdot A^*\chi = -\frac{g}{\pi} \quad \text{при} \quad \mu = +1. \quad (8.46)$$

Для уравнений (8.37), (8.47) и для уравнений (8.38), (8.46) справедливы теоремы Фредгольма. По постановкам задач Дирихле и Неймана свободные члены в этих уравнениях суть непрерывные на кривой Σ функции. Поэтому по теореме 7.5 любое решение каждого из этих уравнений будет непрерывным на Σ , если это решение существует.

Утверждение 8.10.

Для уравнений (8.37) и (8.47) число $\mu = -1$ является правильным значением. ■

Лемма 8.3.

Если логарифмический потенциал простого слоя равен нулю всюду в $\mathbb{R}^2$, то его плотность χ равна нулю всюду на кривой Σ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.1. ■

Доказательство утверждения 8.10.

Предположим, что число $\mu = -1$ является характеристическим для уравнений (8.37) и (8.47). Пусть $\overset{\circ}{\chi}$ — отвечающая этому числу собственная функция оператора A^* с ядром $\mathcal{K}(y, x)$, т.е. при всех $x \in \Sigma$

$$\overset{\circ}{\chi}(x) = - \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\widehat{y-x, n_x^-})}{|x-y|} \right) \cdot \overset{\circ}{\chi}(y) d\Sigma_y. \quad (8.50)$$

По следствию 7.8 функция $\overset{\circ}{\chi}$ непрерывна на Σ . Построим логарифмический потенциал простого слоя $v(x)$ с плотностью $\overset{\circ}{\chi}$. Убедимся, что

потенциал v ограничен на бесконечности (и даже $v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$). Для

этого в (8.50) заменим нормаль n_x^- на n_x^+ и проинтегрируем обе части этого равенства по кривой Σ . Рассуждая как в доказательстве утверждения 8.9, получаем $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}(y) d\Sigma_y = 0$. Теперь из леммы 8.2 следует указанное поведение потенциала v на бесконечности.

В силу условия одностороннего скачка (8.43) и равенства (8.50) правильная нормальная производная $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^+} \right)_e = - \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n_x^-} \right)_e \equiv 0$ на кривой Σ .

Рассмотрим внешнюю задачу Неймана (в D^-):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^-; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n_x^+} \right|_{x \in \Sigma} = 0; \quad |u(x)| < \text{const}.$$

Логарифмический потенциал v является решением этой задачи. По утверждению 8.6 о единственности решения внешней задачи Неймана с точностью до постоянного слагаемого $v(x) \equiv \text{const}$ в $\bar{D}^-$. А вследствие $v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$ получаем $v(x) \equiv 0$ в $\bar{D}^-$. В частности, $v(x) \equiv 0$ на кривой Σ .

Рассуждая далее точно как в доказательстве утверждения 8.7 и применяя лемму 8.3, получаем $\overset{\circ}{\chi}(x) \equiv 0$ на кривой Σ . — Противоречие! ■

Следствие 8.12.

Уравнения (8.37) и (8.47) однозначно разрешимы при любых функциях f и g , непрерывных на кривой Σ . ■

Следствие 8.13.

Внутренняя задача Дирихле на плоскости разрешима при любой непрерывной на Σ функции f , и её решение представляется логарифмическим потенциалом двойного слоя.

Внешняя задача Неймана на плоскости разрешима в том, и только в том случае, если непрерывная функция g удовлетворяет условию $\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma_x = 0$. Решение внешней задачи Неймана представляется суммой логарифмического потенциала простого слоя и произвольной постоянной. ■

Утверждение 8.11.

Для уравнения (8.38) и (8.46) число $\mu = +1$ является характеристическим значением. Его геометрическая кратность равна 1.

Доказательство.

Рассмотрим логарифмический потенциал двойного слоя с постоян-

ной плотностью на Σ :

$$w^-(x) = \int_{\Sigma} \frac{\widehat{\cos(x-y, n_y^-)}}{|x-y|} d\Sigma_y.$$

По теореме Гаусса (см. замечание 8.10) $w^-(x) = \pi$ при всех $x \in \Sigma$, т.е. $\int_{\Sigma} \mathcal{K}(x, y) d\Sigma_y \equiv 1$ на кривой Σ . Это и означает, что $\mu = +1$ есть характеристическое число ядра $\mathcal{K}(x, y)$, которому отвечает собственная функция $\overset{\circ}{\nu}(x) \equiv 1$.

Докажем, что геометрическая кратность числа $\mu = +1$ равна 1. По теореме 2.3 достаточно доказать, что для ядра $\mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$ характеристическое число $\mu = +1$ имеет геометрическую кратность 1. Пусть $\overset{\circ}{\chi}_j$, $j = 1, 2$, — собственные функции ядра $\mathcal{K}^*$, отвечающие этому характеристическому значению:

$$\overset{\circ}{\chi}_j(x) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\widehat{\cos(y-x, n_x^-)}}{|x-y|} \right) \cdot \overset{\circ}{\chi}_j(y) d\Sigma_y. \quad (8.51)$$

По следствию 7.8 функции $\overset{\circ}{\chi}_j$ непрерывны на Σ . Построим логарифмические потенциалы простого слоя $v_j(x)$ с плотностями $\overset{\circ}{\chi}_j$. Докажем, что $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}_j(x) d\Sigma_x \neq 0$.

Предположим противное: $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}_j(x) d\Sigma_x = 0$. Тогда по лемме 8.2 потенциалы $v_j(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$.

В силу условия одностороннего скачка (8.42) и равенства (8.51) правильные нормальные производные $\left(\frac{\partial v_j(x)}{\partial n_x^-} \right)_i \equiv 0$ на кривой Σ , $j = 1, 2$.

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана (в D^+):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^+; \quad \frac{\partial u}{\partial n_x^-} \Big|_{x \in \Sigma} = 0.$$

Логарифмические потенциалы простого слоя v_j являются решениями этой задачи. По утверждению 8.2 о единственности решения внутренней задачи Неймана с точностью до произвольной постоянной имеем $v_j(x) \equiv c_j = \text{const}$ в $\bar{D}^+$. В частности, $v_j(x) \equiv c_j = \text{const}$ на Σ .

Рассмотрим внешние задачи Дирихле (в D^-):

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D^-; \quad u|_{x \in \Sigma} = c_j; \quad |u(x)| < \text{const}; \quad j = 1, 2.$$

Потенциалы v_j являются решениями этих задач. По утверждению 8.4 о единственности решения внешней задачи Дирихле $v_j(x) \equiv c_j$ в $\bar{D}^-$. Следовательно, $v_j(x) \equiv c_j$ в $\mathbb{R}^2$. Но $v_j(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$, поэтому $v_j(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда по лемме 8.3 $\overset{\circ}{\chi}_j(x) \equiv 0$ на кривой Σ . — Противоречие! Поэтому $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}_j(x) d\Sigma_x \neq 0$.

Докажем, что функции $\overset{\circ}{\chi}_1$ и $\overset{\circ}{\chi}_2$ линейно зависимы. Рассмотрим их линейную комбинацию:

$$\varkappa(x) = \overset{\circ}{\chi}_1(x) \cdot \int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}_2(y) d\Sigma_y - \overset{\circ}{\chi}_2(x) \cdot \int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}_1(y) d\Sigma_y.$$

Очевидно, что $\int_{\Sigma} \varkappa(x) d\Sigma_x = 0$. Как показано выше, интеграл по Σ от нетривиального решения уравнения (8.51) отличен от нуля. Поэтому $\varkappa(x) \equiv 0$ на Σ . ■

Итак, каждое из однородных уравнений $\overset{\circ}{\nu} = A\overset{\circ}{\nu}$ и $\overset{\circ}{\chi} = A^*\overset{\circ}{\chi}$ имеет ровно по одному нетривиальному решению (с точностью до ненулевого постоянного множителя); причём, $\overset{\circ}{\nu} \equiv 1$ (см. начало доказательства утверждения 8.11). По теореме 2.4 неоднородное уравнение (8.46) разрешимо в том, и только в том случае, если $g \perp \overset{\circ}{\nu}$, т.е.

$$\int_{\Sigma} g(x) d\Sigma_x = 0. \quad (8.52)$$

Следствие 8.14.

Внутренняя задача Неймана на плоскости разрешима в том, и только в том случае, если непрерывная на Σ функция g удовлетворяет условию ортогональности (8.52). Решение этой задачи представляется суммой логарифмического потенциала простого слоя и произвольной постоянной. ■

Задача 8.14.

Исходя из уравнения (8.46) при $\mu = +1$, проверьте, что если решение внутренней задачи Неймана на плоскости существует, то оно определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого. ■

Единственную собственную функцию $\overset{\circ}{\chi}$ оператора A^* при $\mu = +1$ (см. (8.51)) нормируем так, чтобы $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x = 1$ (в утверждении 8.11 доказано, что $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x \neq 0$). По теореме 2.4 уравнение (8.38)

разрешимо в том, и только в том случае, если $f \perp \overset{\circ}{\chi}$, т.е.

$$\int_{\Sigma} f(x) \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x = 0. \quad (8.53)$$

Если условие ортогональности (8.53) для функции f не выполнено, то решение внешней задачи Дирихле можно искать с помощью уравнения (8.39). По теореме 2.4 уравнение (8.39) разрешимо в том, и только в том случае, если

$$\int_{\Sigma} (f(x) - q) \cdot \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x = 0. \quad (8.54)$$

Поскольку $\int_{\Sigma} \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x = 1$, условие (8.54) означает, что

$$q = \int_{\Sigma} f(x) \overset{\circ}{\chi}(x) d\Sigma_x. \quad (8.55)$$

Следствие 8.15.

Внешняя задача Дирихле на плоскости разрешима при любой непрерывной на Σ функции f , и её решение представляется суммой логарифмического потенциала двойного слоя и постоянной (8.55). ■

Задача 8.15.

Пусть выполнено условие ортогональности (8.54). При $\mu = +1$ уравнение (8.39) имеет общее решение $\nu(x) + c \cdot \overset{\circ}{\nu}(x) = \nu(x) + c$, где c — произвольная постоянная. Докажите, что тем не менее решение внешней задачи Дирихле на плоскости единственно. ■

Задача 8.16.

Докажите, что для нахождения постоянной q в уравнении (8.39) нет необходимости искать собственную функцию $\overset{\circ}{\chi}$ уравнения (8.51). (**Указание.** Ищите решение внешней задачи Дирихле на плоскости в виде $u(x) = w^+(x) + q$, где w^+ — логарифмический потенциал двойного слоя с неизвестной плотностью ν , а постоянная $q = \int_{\Sigma} \nu(y) d\Sigma_y$. Докажите, что в этом случае уравнение (8.39) однозначно разрешимо.) ■

Замечание 8.14.

Задачи теории потенциала на плоскости можно изучать также методами теории функций комплексной переменной (см. [14], Гл.7, §2). ■

Задачи к главе 6.

1. Интегральный оператор $(A\varphi)(x) = \int_0^1 \varphi(y)dy$ рассматриваем как действующий из $L_2[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$. Является ли оператор A вполне непрерывным? Является ли оператор A самосопряжённым? Найдите все характеристические значения оператора A и отвечающие им собственные функции. Для каких функций $f \in L_2[0, 1]$ разрешимо относительно $\varphi \in L_2[0, 1]$ уравнение $(A\varphi)(x) = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$?

2. Разрешимо ли уравнение $\int_0^1 \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy = 3 \sin(2\pi x) + 2 \sin(3\pi x)$, где $\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} x \cdot (1 - y), & 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ (1 - x) \cdot y, & 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$?
Если да, то найдите $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

3. Разрешимо ли уравнение $\int_0^{2\pi} \cos(x + y) \cdot \varphi(y)dy = \pi \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$? Если да, то единственно ли решение?

4. В каком случае уравнение (6.1) не имеет решений? В каком случае решение уравнения (6.1) не является единственным? Почему задача решения уравнения (6.1) не обладает свойством устойчивости решения по отношению к малым изменениям свободного члена?

5. Материальная точка массы m совершает колебания вдоль оси Ox в поле сил; в точке x она имеет потенциальную энергию $U(x)$. Функция $U(x)$ чётная и монотонно возрастает при $x > 0$. Известна зависимость периода колебаний T материальной точки от её энергии E . Найдите $U(x)$.

6. Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Найдите решение φ уравнения (6.10), выполнив замену переменной интегрирования $x = s \cdot \tau$ в равенстве (6.14). Докажите непрерывность $\varphi(x)$ при $x > 0$.

7. Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Найдите решение φ уравнения (6.18), выполнив замену переменной интегрирования $x = s \cdot \tau$ в равенстве (6.23). Докажите непрерывность $\varphi(x)$ при $x \geq 0$.

8. $f(x) = x$. При $x > 0$ найдите дробную производную от f порядка $\frac{1}{2}$; порядка $\frac{3}{2}$.

9. Пусть в интегральном уравнении Вольтерры 1-го рода

$$\int_a^x \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad f(a) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

ядро $\mathcal{K}$ непрерывно в замкнутом треугольнике $T = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, имеет в T непрерывные производные $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial y}$, и при всех $x \in [a, b]$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$. Требуется для любой функции $f \in \Psi$ найти решение уравнения $\varphi \in \Phi$, где Φ и Ψ — заданные классы функций.

Корректна ли эта задача, если

- 1.) $\Phi = C[a, b]$, $\Psi = \{f \in C[a, b], f(a) = 0\}$;
- 2.) $\Phi = C[a, b]$, $\Psi = \{f \in C^1[a, b], f(a) = 0\}$?

Задачи к главе 7.

1. Докажите, что при $0 < \alpha < 1$ и $x \in [a, b]$ выполнена оценка $\int_a^b \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Сопоставьте эту оценку с оценкой из утверждения 7.1 при $l = 1$.

2. Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^l$. На $\Omega \times \Omega$ задано ядро $\mathcal{K}(x, y) = \frac{Q(x, y)}{|x-y|^\alpha}$, где Q — ограниченная на $\Omega \times \Omega$ функция. При каких номерах n итерированные ядра $\mathcal{K}_n$ заведомо будут фредгольмовыми? Заведомо будут ограничены? Рассмотрите следующие случаи:

$$l = 1; \alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{6}{7}, \frac{97}{100};$$

$$l = 2; \alpha = \frac{9}{10}, 1, \frac{9}{5}, \frac{97}{50};$$

$$l = 3; \alpha = 1, \frac{3}{2}, \frac{18}{7}, \frac{97}{33}.$$

3. $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \geq 0$ функция. Найдите непрерывно дифференцируемое решение φ уравнения $\varphi(x) - \int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}} = f(x)$, $0 \leq x < +\infty$.

4. Докажите, что при $|\mu| < \frac{l-\alpha}{M \cdot |\sigma| \cdot \Delta^{l-\alpha}}$ метод последовательных приближений $\varphi_m = \mu A \varphi_{m-1} + f$ сходится в $L_2(\Omega)$ к единственному решению уравнения (7.2) со свободным членом $f \in L_2(\Omega)$ (начальное приближение $\varphi_0 \in L_2(\Omega)$ произвольно). Докажите, что все указанные значения μ правильные для оператора A со слабой особенностью.

5. $x, y \in \mathbb{R}^1$. Пусть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ задано в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, удовлетворяет условию (7.3) и может иметь точки разрыва только на кривой $y = q(x)$, где q — непрерывная на $[a, b]$ функция (в остальных точках квадрата S ядро $\mathcal{K}$ непрерывно). Докажите, что ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно по переменной $x \in [a, b]$ в целом.

Задачи к главе 8.

$O_{x_1x_2}$ — декартова система координат в $\mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$.

$O_{x_1x_2x_3}$ — декартова система координат в $\mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1. С помощью поверхностного потенциала двойного слоя решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $x_3 > 0$.

2. С помощью логарифмического потенциала двойного слоя решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $x_2 > 0$.

3. С помощью поверхностного потенциала простого слоя решите задачу Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве $x_3 > 0$.

4. С помощью логарифмического потенциала двойного слоя решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

1.) внутри круга $|x| < R$; 2.) вне круга.

5. С помощью логарифмического потенциала простого слоя решите задачу Неймана для уравнения Лапласа:

1.) внутри круга $|x| < R$; 2.) вне круга.

6. С помощью поверхностного потенциала двойного слоя решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

1.) внутри шара $|x| < R$; 2.) вне шара.

Ответы задач к главе 6.

1. Уравнение разрешимо только если $f(x) \equiv f = \text{const}$. Если $f \neq 0$, то частным решением будет $\varphi(x) \equiv f = \text{const}$. При этом общее решение уравнения имеет вид $\varphi(x) = f + \psi(x)$, где $\psi \in L_2[0, 1]$ и $\psi \in \text{Ker} A$.

2. $\varphi(x) = 12\pi^2 \sin(2\pi x) + 18\pi^2 \sin(3\pi x)$.

3. Решение существует, не является единственным.

6. $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi x} \cdot \int_0^x \frac{y \cdot f'(y) + \alpha \cdot f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy$.

7. $\varphi(x) = \frac{2}{\pi x} \cdot \int_0^x \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot [y \cdot f'(y) + f(y)] dy$.

8. $(D_{\frac{1}{2}} f)(x) = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$; $(D_{\frac{3}{2}} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$.

9. 1.) некорректна; 2.) корректна.

Ответы задач к главе 7.

3. $\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}} + \pi \cdot \int_0^x e^{\pi(x-y)} \cdot \left(f(y) + \int_0^y \frac{f(t)dt}{\sqrt{y-t}} \right) dy$.

4. **Решение.** Введём отображение W , действующее из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$: $W\varphi = \mu A\varphi + f$. Тогда уравнение (7.2) является задачей $\varphi = W\varphi$ о неподвижной точке отображения W . Для любых $\varphi, \theta \in L_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|W\varphi - W\theta\|_{L_2(\Omega)} = \|\mu A(\varphi - \theta)\|_{L_2(\Omega)} \leq |\mu| \cdot \|A\| \cdot \|\varphi - \theta\|_{L_2(\Omega)}.$$

По следствию 7.1 имеем оценку $\|A\| \leq \frac{M \cdot |\sigma| \Delta^{l-\alpha}}{l-\alpha}$. Если

$|\mu| < \frac{l-\alpha}{M \cdot |\sigma| \cdot \Delta^{l-\alpha}}$, то $|\mu| \cdot \|A\| < 1$, и отображение W будет сжимающим (см. замечание 2.12). В полном пространстве $L_2(\Omega)$ отображение W имеет единственную неподвижную точку — решение уравнения (7.2). Метод последовательных приближений $\varphi_m = \mu A\varphi_{m-1} + f$ сходится к этому решению при любом начальном приближении $\varphi_0 \in L_2(\Omega)$. При $f = 0$ и при указанных μ уравнение (7.2) будет иметь лишь решение $\varphi = 0$, т.е. эти значения μ правильные. ■

5. **Решение.** Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Введём обозначение $N = \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy$. Выберем произвольную точку

$x_1 \in [a, b]$; пусть $y_1 = q(x_1)$. Рассмотрим некоторый отрезок $I_h = \{x_1 - h \leq x \leq x_1 + h\}$ (отрезок $I_h = \{a \leq x \leq a + h\}$, если $x_1 = a$; отрезок $I_h = \{b - h \leq x \leq b\}$, если $x_1 = b$). Число $h(\varepsilon)$

выберем столь малым, чтобы во всех точках $x \in I_h$ выполнялось неравенство $|q(x) - y_1| < \eta = \frac{\varepsilon^2}{64 \cdot N}$. В прямоугольниках $I_h \times \{a \leq y \leq y_1 - 2\eta\} = R_a$ и $I_h \times \{y_1 + 2\eta \leq y \leq b\} = R_b$ ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно.

Пусть $|x_2 - x_1| < h$. Интеграл $\int_a^b |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy$ запишем в виде суммы трёх интегралов: $\mathcal{I}_1 = \int_a^{y_1-2\eta}$, $\mathcal{I}_2 = \int_{y_1-2\eta}^{y_1+2\eta}$, $\mathcal{I}_3 = \int_{y_1+2\eta}^b$. Очевидно, что $\mathcal{I}_2 \leq \int_{y_1-2\eta}^{y_1+2\eta} |\mathcal{K}(x_1, y)| dy + \int_{y_1-2\eta}^{y_1+2\eta} |\mathcal{K}(x_2, y)| dy$. Из неравенства Коши–Буняковского и из условия (7.3) получа-

$$\text{ем} \quad \int_{y_1-2\eta}^{y_1+2\eta} |\mathcal{K}(x, y)| dy \leq \sqrt{4\eta} \cdot \left(\int_{y_1-2\eta}^{y_1+2\eta} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq \sqrt{4\eta N} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поэтому $\mathcal{I}_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ независимо от выбора точки x_1 .

Для оценки интегралов $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_3$ выберем число $\delta < h$ так, чтобы при $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $|\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; это возможно в силу непрерывности ядра $\mathcal{K}$ в прямоугольниках R_a и R_b . Тогда $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_3 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Теперь для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ из неравенства $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\int_a^b |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| dy < \varepsilon$. ■

Ответы задач к главе 8.

$$1. u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{x_3 \cdot f(y) d\Sigma_y}{|x - y|^3}, \quad \Sigma = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = 0\}.$$

$$2. u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{x_2 \cdot f(y) d\Sigma_y}{|x - y|^2}, \quad \Sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\}.$$

$$3. u(x) = \frac{(-1)}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{g(y) d\Sigma_y}{|x - y|}, \quad \Sigma = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = 0\}.$$

$$4.1. u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Sigma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2} \cdot f(y) d\Sigma_y, \quad \Sigma = \{|y| = R\}.$$

$$4.2. \ u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Sigma} \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^2} \cdot f(y) d\Sigma_y, \quad \Sigma = \{|y| = R\}.$$

$$5.1, 5.2. \ u(x) = \frac{(-1)}{\pi} \int_{\Sigma} g(y) \cdot \ln \frac{1}{|x - y|} d\Sigma_y + const, \quad \Sigma = \{|y| = R\}.$$

$$6.1. \ u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \cdot f(y) d\Sigma_y, \quad \Sigma = \{|y| = R\}.$$

$$6.2. \ u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^3} \cdot f(y) d\Sigma_y, \quad \Sigma = \{|y| = R\}.$$